Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'sercitazione 3 – 4 del 12 – 14 Marzo 2018
Argomento: Derivate, Massimi e minimi, Regola di de l'Hôpital

1. Trovare gli estremi superiore e inferiore della funzione f sull'insieme A, specificando se si tratta del massimo e/o del minimo:

   (a) $f(x) = x^3 - x$, $A = [0, 1]$;
   Innanzi tutto, f è continua e A è compatto, dunque dal Teorema di Weierstrass esisteranno sicuramente massimo e minimo. Sui bordi del dominio abbiamo $f(0) = f(1) = 0$, mentre scrivendo $f(x) = x(x-1)(x+1)$ notiamo che $f(x) < 0$ se $0 < x < 1$. Dunque, $\max_A f = 0$ mentre il minimo sarà raggiunto in un punto interno che annulli f'; quest'ultima vale $f'(x) = 3x^2 - 1$ e l'unico punto di A in cui si annulla è $\frac{1}{\sqrt{3}}$, quindi $\min_A f = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

   (b) $f(x) = 4|x| - x^2$, $A = [-3, 3]$;
   Anche in questo caso f è continua e A è compatto e dunque esistono minimo e massimo. Tuttavia, f non è derivabile in 0 quindi il massimo o il minimo potrebbero essere raggiunti anche in questo punto, oltre che negli estremi del dominio e negli zeri di f'. Abbiamo $f(\pm 3) = 3$ e $f(0) = 0$, mentre scrivendo $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 & x \in [0, 3] \\ -4x - x^2 & x \in [-3, 0) \end{cases}$ otteniamo $f'(x) = \begin{cases} 4 - 2x & x \in (0, 3] \\ -4 - 2x & x \in [-3, 0) \end{cases}$. Gli zeri della derivata sono dunque 2 e -2 e vale $f(\pm 2) = 4$, dunque concludiamo che $\min_A f = f(0) = 0$ e $\max_A f = f(\pm 2) = 4$.

   (c) $f(x) = \frac{\log x}{x}$, $A = (0, 3]$;
   Innanzi tutto, all'estremo di A abbiamo $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ e dunque $\inf_A f = -\infty$, mentre nell'altro estremo vale $f(3) = \frac{\log 3}{3}$.
   La derivata di f vale $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$ e si annulla in $x = e$, mentre per $x < e$ la funzione è crescente e per $x > e$ è decrescente. $x = e$ è dunque un massimo relativo ed essendo l'unico sarà anche un massimo assoluto, dunque $\max_A f = f(e) = \frac{1}{e}$.

   (d) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$, A è il dominio di f;
   Innanzi tutto, f è definita quando gli argomenti di entrambe le radici sono non-negativi, dunque $A = [0, 2]$. Agli estremi del dominio abbiamo $f(0) = f(2) = \sqrt{2}$, mentre all'interno abbiamo $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2 - x}} = \frac{\sqrt{2 - x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{2 - x}}$, che si annulla per $x = 1$, valore che dà $f(1) = 2$. Dunque, $\min_A f = \sqrt{2}$ e $\max_A f = 2$.

2. Trovare il numero di zeri della funzione f sul proprio insieme di definizione:

(a) $f(x) = x^5 - 5x + 1$;
Innanzi tutto, f è definita su tutto $\mathbb{R}$; inoltre, essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, f ammetterà ammeno uno zero. La derivata $f'(x) = 4x^4 - 4 = 4(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$ si annulla nei punti $x = \pm 1$ e vale $f(-1) = 5$ e $f(1) = -3$. Dunque, f avrà un solo zero nell'intervallo di monotonia $(-\infty, -1)$, uno in $(-1, 1)$ e uno in $(1, +\infty)$, in tutto esattamente tre.

(b) $f(x) = ax - \log(1 - |x|) \quad \alpha \in \mathbb{R}$;
f ha definita se $-1 < x < 1$ e abbiamo $\lim_{x\to\pm 1} f(x) = +\infty$, mentre $x = 0$ è uno zero di f e un punto in cui f non è derivabile. Per tutti gli altri valori, f' vale $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a+1-ax}{1-x} & 0 < x < 1 \\ \dfrac{a-1+ax}{1+x} & -1 < x < 0 \end{cases}$. Se $|a| < 1$, allora f non ha punti critici, decresce da -1 a 0 e cresce da 0 a 1, quindi $x = 0$ sarà l'unico zero della funzione. Se $a > 1$ invece c'è un punto di minimo $x_a = \dfrac{1}{a} - 1 < 0$, la funzione decresce da -1 a x_a e cresce da x_a a 0 e tra 0 e 1; dunque in particolare $f(x_a) \le f(0) = 0$ e quindi avremo un altro zero tra -1 e x_a, cioè due in totale. Infine, anche se $a < -2$ c'è un minimo dato da $x_a = \dfrac{1}{a} + 1 > 0$: la funzione decresce tra -1 e 0 e tra 0 e x_a e cresce tra x_a e 1, e in quest'ultimo intervallo avremo un secondo zero.

3. Sia $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$ per $x \in [0, 1]$. Calcolarne la derivata f', dimostrare che f è costante e calcolarne il suo valore.
È possibile dire lo stesso di $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$?
La funzione f è derivabile sull'intervallo $(0, 1)$, perché lo sono l'arcoseno e l'arcocoseno, e la sua derivata è $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, dunque è costante sull'intervallo chiuso $[0, 1]$ e il suo valore è lo stesso in un suo punto qualsiasi, ad esempio $x = \dfrac{1}{2}$:

$$f(x) \equiv f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Anche la derivata di g vale 0:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot -\frac{1}{x^2} = 0;$$

tuttavia, non si può ripetere il precedente argomento, perché l'insieme di definizione di g è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che non è un intervallo. Infatti, g non è costante: lo è su ciascun intervallo $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$ ma i due valori sono diversi: il primo è $g(1) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$, il secondo è $g(-1) = 2\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$.

4. Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

(a) $\log(1+x) \le x \quad \forall x > -1$;
Consideriamo la funzione $f(x) = \log(1+x) - x$ per $x > -1$: la sua derivata è $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x}$, dunque $x = 0$ è un punto di minimo per f ed essendo l'unico è un minimo assoluto, dunque $\log(1+x) - x = f(x) \le f(0) = 0$ per ogni $x > -1$ e cioè $\log(1+x) \le x$.

(b) $\log(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0$;

Ragioniamo come sopra con $f(x) = \log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ per $x \geq 0$: abbiamo $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x}$, dunque f è crescente e ha il massimo per $x = 0$, cioè $\log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \leq f(0) = 0$, ovvero $\log(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2}$.

(c) $1 - \cos(x) \leq \dfrac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

Prendiamo $f(x) = 1 - \cos(x) - \dfrac{x^2}{2}$, che ha per derivata $f'(x) = \sin x - x$. Dalla ben nota disuguaglianza $|\sin x| \leq |x|$ deduciamo che $f'(x) \geq 0$ per $x > 0$ e $f'(x) \leq 0$ per $x < 0$, dunque f ha un massimo (assoluto) in $x = 0$, con $f(0) = 0$, e dunque $1 - \cos(x) - \dfrac{x^2}{2} \leq 0$.

(d) $x^x \geq x \quad \forall x > 0$;
Scrivendo $x^x = e^{x \log x}$ e $x = e^{\log x}$, sarà sufficiente dimostrare che $f(x) := (x-1)\log x \geq 0$ per ogni $x > 0$. Ciò segue dal fatto che per $x \leq 1$ entrambi i fattori sono minori o uguali a zero mentre per $x > 1$ sono entrambi positivi.

(e) $x^\alpha + y^\alpha \leq (x+y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha) \quad \forall x, y \geq 0,\ \alpha \geq 1$;
La disuguaglianza è chiaramente verificata per $y = 0$ (essendo un uguaglianza), mentre per $y \neq 0$ è equivalente a dimostrare

$$t^\alpha + 1 \leq (t+1)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(t^\alpha + 1) \quad t := \frac{x}{y} > 0.$$

Per la prima disuguaglianza, consideriamo la funzione $f_\alpha(t) := (t+1)^\alpha - t^\alpha - 1$, che si annulla in $t = 0$ e ha per derivata $f'_\alpha(t) := a\left((t+1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\right) > 0$; dunque, $f_\alpha > f(0) = 0$ e la prima disuguaglianza è provata. Per la seconda, prendo $g_\alpha(t) := 2^{\alpha-1}(t^\alpha + 1) - (t+1)^\alpha$ che verifica $g(1) = 0$ e $g'_\alpha(t) = a\left(2^\alpha t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}\right)$, positiva per $t > 1$ e negativa per $t < 1$; dunque $g_\alpha \geq g_\alpha(1) = 0$, che dimostra la seconda disuguaglianza.

(f) $|\tan x| \geq |x| \quad \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;
Essendo la tangente dispari, ciò equivale a dimostrare che $f(x) := \tan x - x \geq 0$ per $x > 0$ e $f(x) \leq 0$ per $x < 0$: ciò segue dal fatto che f è crescente, in quanto $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0$.

(g) $x^a e^{-bx} \leq \left(\dfrac{a}{be}\right)^a \quad \forall x \geq 0,\ a, b > 0$;
La derivata di $f(x) = x^a e^{-bx}$ è $f'(x) = (a - bx)x^{a-1}e^{-bx}$ e si annulla solo in $x = \dfrac{a}{b}$, e in questo punto la funzione vale $\left(\dfrac{a}{be}\right)^a$; poiché $f(0) = 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, questo sarà il massimo assoluto di f.

(h) $2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha) \leq (x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha \quad \forall x, y \geq 0,\ 0 \leq \alpha \leq 1$;
Come nel punto precedente, sarà sufficiente dimostrare $2^{\alpha-1}(t^\alpha + 1) \leq (t+1)^\alpha \leq (t^\alpha + 1)$ per $t > 0$. Come prima, prendo $f_\alpha(t) = (t+1)^\alpha - t^\alpha - 1$ e $g_\alpha(t) = 2^{\alpha-1}(t^\alpha + 1) - (t+1)^\alpha$ ma stavolta essendo $\alpha - 1 \leq 0$ avremo $f'_\alpha(t) < 0$ e dunque $f_\alpha \leq f_\alpha(0) = 0$; analogamente, g_α avrà un massimo in 1 e quindi $g_\alpha \leq g_\alpha(1) = 0$ e questo, come sopra, dimostra le disuguaglianze richieste.

5. Calcolare i seguenti limiti e spiegare perché non vale la regola di De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1}.$$

I limiti valgono rispettivamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Nel primo caso non è possibile applicare la regola di De l'Hôpital perché il rapporto tra le derivate del numeratore e del denominatore è $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, che non ha limite per $x \to +\infty$. Nel secondo caso non è possibile applicare la regola (che darebbe il risultato errato di $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1} = 1$) perché non è una forma indeterminata.

6. Calcolare i seguenti limiti con la regola di de l'Hôpital:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

Il limite è una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$, ed essendo derivabili sia il numeratore che il denominatore è possibile applicare la regola di de l'Hôpital: posta $f(x) := x - \sin x$ e $g(x) = x^3$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} 1 - \cos x x^2 = \frac{1}{6}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^x - 1}{x}$;

Anche questa è una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$, dal momento che $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$, e dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^x(1+\log x)}{1} = \lim_{x\to 0} 1 + \log x = -\infty.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$;

Scrivendo il limite come $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$ è possibile applicare la regola anche in questo caso:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}.$$

Quest'ultima è ancora una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$ e può essere calcolata applicando nuovamente de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

(d) $\lim_{x\to 0}\left(e^x+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$;

Scrivendo il limite come $\lim_{x\to 0} e^{\log\left(\left(e^x+x^2\right)^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log\left(e^x+x^2\right)}{x}}$, è possibile applicare la regola all'esponente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(e^x+x^2\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+2x}{e^x+x^2}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+2x}{e^x+x^2} = 1,$$

dunque il limite di partenza vale $e^1 = e$.

(e) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+2x)-2\log(1+x)}{1-\cos x}$;

Si può applicare la regola di de l'Hôpital derivando il numeratore $f(x) := \log(1+2x) - 2\log(1+x)$ e il denominatore $g(x) := 1-\cos x$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+2x}-\frac{2}{1+x}}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{(1+2x)(1+x)}}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2}{(1+2x)(1+x)}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

(f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$;

Scrivendo il limite come $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x}{\cos x}$, è una forma indeterminata del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{-\sin x} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

(g) $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\arctan x}$;

Come in precedenza, scriviamo il limite come $\lim_{x\to 0} e^{\arctan(x)\log(\sin x)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(\sin x)}{\frac{1}{\arctan x}}}$, che è una forma del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ a cui può essere applicata la regola di de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log(\sin x)}{\frac{1}{\arctan x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\arctan^2 x}\frac{1}{1+x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\arctan^2 x}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0}(-x)\lim_{x\to 0}\frac{\arctan^2 x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dunque il limite di partenza è $e^0 = 1$.