Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 4 del 30 Novembre 2017
Argomento: Insiemi di Cantor, Spazi ℓ_p

1. Sia $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di unioni finite di intervalli chiusi così definita:
Pongo $C_0 := [0,1]$; dato $C_n = \coprod_i [a_i, b_i]$, C_{n+1} è ottenuto togliendo a ciascun intervallo il terzo centrale, cioè $C_{n+1} := \coprod_i \left(\left[a_i, \frac{2a_i + b_i}{3}\right] \cup \left[\frac{a_i + 2b_i}{3}, b_i\right]\right)$, ad esempio $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
Definiamo poi l'*insieme di Cantor* $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.
Sia poi $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua lineare a tratti così definita: dato $C_n = \coprod_i [a_i, b_i]$, f_n avrà pendenza $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ su ciascun intervallino $[a_i, b_i]$ e sarà costante su (b_i, a_{i+1}) tra un intervallino e l'altro; ad esempio, $f_0(x) = x$ e $f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) & \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$.

   (a) Dimostrare che C è Boreliano e che ha misura di Lebesgue nulla.

   (b) Dimostrare che e $|f_n(x) - f_m(x)| \le \frac{1}{3\cdot 2^n}$ per ogni $x \in [0,1]$, $m \ge n$. Dedurne che f_n converge uniformemente a una certa f, che è continua, non-negativa e non-decrescente, nota come *funzione di Cantor*.

   (c) Dimostrare che $f(C) = [0,1]$.

   (d) Dimostrare che f è derivabile in quasi ogni $x \in [0,1]$ con $f'(x) = 0$. Dedurne che $f(1) - f(0) \neq \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$.

2. Consideriamo, per $p \ge 1$, lo spazio di successioni con p-esima potenza sommabile

$$\ell_p := \left\{\{x(k)\}_{k\in\mathbb{N}} : \|x\|_p := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\right\}.$$

   Dando per buono che $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach, dimostrare le seguenti affermazioni:

   (a) Se $q \ge p$ allora $\|x\|_q \le \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell_p$, e in particolare $\ell_p \subset \ell_q$.

(b) Lo spazio $(\ell_p, \|\cdot\|_q)$ NON è completo per nessun $q > p$.
(Suggerimento: considerare la successione $x_n(k) := \begin{cases} x(k) & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$ per un qualche $x \in \ell_q \setminus \ell_p$, ad esempio $x(k) = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{p}}}$.)

(c) ℓ_p è separabile per ogni p.
(Suggerimento: considerare il sottospazio di $X \subset \ell_p$ dato da

$$X := \{x \in \ell_p : \, x(k) \in \mathbb{Q} \, \forall \, k \in \mathbb{N}, \, x(k) = 0 \text{ definitivamente}\}.)$$

Sia ora ℓ_∞ lo spazio di successioni limitate

$$\ell_\infty := \left\{ \{x(k)\}_{k \in \mathbb{N}} : \, \|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)| < +\infty \right\}$$

e sia c_0 lo spazio delle successioni infinitesime

$$c_0 := \{\{x(k)\}_{k \in \mathbb{N}} : x(k)_{k \to +\infty} \to 0\}.$$

Dando per buono che $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach e che c_0 è un suo sottospazio chiuso, dimostrare le seguenti affermazioni:

(d) c_0 è separabile mentre ℓ_∞ non lo è.
(Suggerimento: mostrare che non è separabile il sottoinsieme $Y \subset \ell_\infty$ definito da

$$Y := \{x \in \ell_\infty : x(k) \in \{0, 1\} \, \forall \, k \in \mathbb{N}\}.)$$