Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 4 del 30 Novembre 2017
Argomento: Insiemi di Cantor, Spazi ℓ_p

1. Sia $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di unioni finite di intervalli chiusi così definita:
Pongo $C_0 := [0,1]$; dato $C_n = \coprod_i [a_i, b_i]$, C_{n+1} è ottenuto togliendo a ciascun intervallo il terzo centrale, cioè $C_{n+1} := \coprod_i \left(\left[a_i, \frac{2a_i+b_i}{3}\right] \cup \left[\frac{a_i+2b_i}{3}, b_i\right]\right)$, ad esempio $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
Definiamo poi l'*insieme di Cantor* $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.
Sia poi $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua lineare a tratti così definita: dato $C_n = \coprod_i [a_i, b_i]$, f_n avrà pendenza $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ su ciascun intervallino $[a_i, b_i]$ e sarà costante su (b_i, a_{i+1}) tra un intervallino e l'altro; ad esempio, $f_0(x) = x$ e $f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) & \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$.

   (a) Dimostrare che C è Boreliano e che ha misura di Lebesgue nulla.

   (b) Dimostrare che e $|f_n(x) - f_m(x)| \le \frac{1}{3\cdot 2^n}$ per ogni $x \in [0,1]$, $m \ge n$. Dedurne che f_n converge uniformemente a una certa f, che è continua, non-negativa e non-decrescente, nota come *funzione di Cantor*.

   (c) Dimostrare che $f(C) = [0,1]$.

   (d) Dimostrare che f è derivabile in quasi ogni $x \in [0,1]$ con $f'(x) = 0$. Dedurne che $f(1) - f(0) \neq \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$.

   (a) Essendo C un intersezione di chiusi, è chiuso a sua volta e pertanto Boreliano. Inoltre, $m(C_0) = 1$ e $m(C_{n+1}) = \frac{2}{3}m(C_n)$, dunque $m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$; essendo C intersezione decrescente di misurabili con $m(C_0) < +\infty$, allora $m(C) = \lim_{n\to+\infty} m(C_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

   (b) Dalla definizione abbiamo

$$|f_1(x) - f_0(x)| \le \left|f_1\left(\frac{1}{3}\right) - f_0\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|f_1\left(\frac{2}{3}\right) - f_0\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{1}{6}.$$

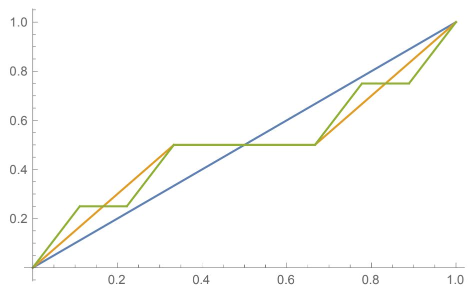
Inoltre, poiché f_{n+1} è ottenuta da f_n riscalando di un fattore $\frac{1}{2}$ su ciascun intervallino, allora

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f_{n-1}(x)| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n} \sup_{x\in[0,1]} |f_1(x)-f_0(x)| = \frac{1}{6}\frac{1}{2^n},$$

dunque per ogni $m \geq n, x \in [0,1]$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{3 \cdot 2^n}.$$

Da ciò deduciamo che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme e dunque convergerà uniformemente a una certa f, che ovviamente avrà lo stesso segno e monotonia delle f_n e inoltre, poiché la convergenza uniforme mantiene la continuità, sarà anch'essa continua.



(c) Chiaramente $f([0,1]) = [0,1]$. Prendiamo $y \in [0,1]$ e $x \in f^{-1}(\{y\})$ e supponiamo che $x \in C$; allora x apparterrà ad un qualche intervallo $(a_n, b_n) \subset C_n \setminus C_{n+1}$ che è stato rimosso al passo n-esimo della costruzione. Tuttavia, f è costante sull'intervallo $[a_n, b_n]$, perché lo erano tutte le f_m per $m \geq n$, dunque $y = f(x) = f(a_n)$ e $a_n \in C$; quindi ogni $y \in [0,1]$ è immagine di un qualche $a_n \in C$, in altre parole $f(C) = [0,1]$.

(d) Se $x \in [0,1] \setminus C$ allora x apparterrà a un intervallo aperto del tipo (a_n, b_n) in cui f è costante. Dunque, poichè f è costante in un intorno di x, allora $f'(x)$ esiste e vale 0; avendo C misura nulla, questo è vero per quasi ogni x. In particolare, essendo f' definita quasi ovunque possiamo calcolarne l'integrale che vale $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$, mentre $f(1) - f(0) = 0$.

2. Consideriamo, per $p \geq 1$, lo spazio di successioni con p-esima potenza sommabile

$$\ell_p := \left\{ \{x(k)\}_{k\in\mathbb{N}} : \|x\|_p := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Dando per buono che $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach, dimostrare le seguenti affermazioni:

(a) Se $q \geq p$ allora $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell_p$, e in particolare $\ell_p \subset \ell_q$.

(b) Lo spazio $(\ell_p, \|\cdot\|_q)$ NON è completo per nessun $q > p$.
(Suggerimento: considerare la successione $x_n(k) := \begin{cases} x(k) & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$, per un qualche $x \in \ell_q \setminus \ell_p$, ad esempio $x(k) = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{p}}}$.)

(c) ℓ_p è separabile per ogni p.
(Suggerimento: considerare il sottospazio di $X \subset \ell_p$ dato da

$$X := \{x \in \ell_p : x(k) \in \mathbb{Q} \, \forall \, k \in \mathbb{N}, \, x(k) = 0 \text{ definitivamente}\}.)$$

Sia ora ℓ_∞ lo spazio di successioni limitate

$$\ell_\infty := \left\{ \{x(k)\}_{k\in\mathbb{N}} : \|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| < +\infty \right\}$$

e sia c_0 lo spazio delle successioni infinitesime

$$c_0 := \{\{x(k)\}_{k\in\mathbb{N}} : x(k)_{k\to+\infty} \to 0\}.$$

Dando per buono che $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach e che c_0 è un suo sottospazio chiuso, dimostrare le seguenti affermazioni:

(d) c_0 è separabile mentre ℓ_∞ non lo è.
(Suggerimento: mostrare che non è separabile il sottoinsieme $Y \subset \ell_\infty$ definito da

$$Y := \{x \in \ell_\infty : x(k) \in \{0,1\} \, \forall \, k \in \mathbb{N}\}.)$$

(a) Se $q \geq p$, allora

$$\|x\|_q^q = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|^q \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|^{q-p} \sum_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|^p = \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|^p \right)^{1-\frac{q}{p}} \|x\|_p^p \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|^p \right)^{1-\frac{q}{p}} \|x\|_p^p = \|x\|_p^q,$$

e dunque $\|x\|_q \leq \|x\|_p$; in particolare, se la seconda è finita lo sarà anche la prima e cioè se $x \in \ell_p$ allora $x \in \ell_q$.

(b) La successione x_n indicata nel suggerimento è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_q$, perché per $m \geq n$ abbiamo $x_n(k) - x_m(k) = \begin{cases} x(k) & n+1 \leq k \leq m \\ 0 & k \leq n \text{ oppure } k > m \end{cases}$ e dunque $\|x_n(k) - x_m(k)\|_q^q = \sum_{k=n+1}^{m} |x(k)|^q \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0$, perché la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|^q$ converge.
Tuttavia, se $\|x_n - y\|_q \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per qualche $y \in \ell_p$, allora y verificherebbe $|y(k) - x_n(k)|^q \leq \|y - x_n\|_q^q \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni k, cioè $y(k) = x(k)$, ma questo è impossibile perché $x \notin \ell_p$.

(c) Innanzi tutto, lo spazio X è numerabile perché $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_m$ con

$$X_m := \{x \in \ell_\infty : x(k) \in \{0,1\}\, \forall\, k \leq m\},$$

e ogni X_m è una copia di $\mathbb{Q}^m$.
Fissato $x \in \ell_p$ e $\varepsilon > 0$, cerco $x_\varepsilon \in X$ tale che $\|x_\varepsilon - x\|_p \leq \varepsilon$: innanzi tutto prendo k_0 tale che $\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} |x(k)|^q \leq \frac{\varepsilon}{2}$; poi, per $k \leq k_0$, scelgo $x_\varepsilon(k) \in \mathbb{Q}$ tale che $|x_\varepsilon(k) - x(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$ e prendo $x_\varepsilon \in X$ data da $x_\varepsilon(k) = \begin{cases} x_\varepsilon(k) & k \leq k_0 \\ 0 & k \geq k_0 + 1 \end{cases}$. Con questa scelta ho

$$\|x_\varepsilon - x\|_q^q = \sum_{k=0}^{k_0} |x_\varepsilon(k) - x(k)|^q + \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} |x(k)|^q \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^q}{2^{kq}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon^q \frac{2^q}{2^q - 1} + \frac{\varepsilon}{2},$$

che a meno di ridefinire ε è quello che volevamo.

(d) La separabilità di c_0 si fa in maniera analoga a quella degli ℓ_p: dati $x \in c_0$ e ε, prendo k_0 tale che $\sup_{k\geq k_0+1} |x(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e, per $k \leq k_0$, $x_\varepsilon(k) \in \mathbb{Q}$ con $|x_\varepsilon(k) - x(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$.
Quanto a ℓ_∞, notiamo che il sottoinsieme Y indicato nel suggerimento ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, cioè più che numerabile; inoltre, dati $y, y' \in Y$ con $y \neq y'$ esisterà k tale che $y(k) = 1$ e $y'(k) = 0$ (o viceversa), dunque $\|y' - y\|_\infty \geq |y'(k) - y(k)| = 1$.
Da questo, segue facilmente che Y non può essere separabile: se infatti esistesse $X \subset Y$ denso e numerabile, allora per ogni $y \in Y$ potrei trovare $x_y \in X$ con $\|x_y - y\|_\infty \leq \frac{1}{3}$, e per $y' \neq y$ avrò $x_{y'} \neq x_y$, perché dalla disuguaglianza triangolare

$$\|x_{y'} - x_y\|_\infty \leq \|y' - y\|_\infty - \|y' - x_{y'}\|_\infty - \|y - x_y\|_\infty \geq \frac{1}{3}.$$

Questo vorrebbe dire che X ha cardinalità non inferiore a quella di Y, ma questo è impossibile perché assumevamo X numerabile mentre Y non lo è.