Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 5 del 14 Dicembre 2017
Argomento: Spazi L^p

1. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_1$ definita da $x_n(k) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$. Dimostrare che:
   (a) $\|x_n\|_p = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$;
   (b) x_n non ha estratte convergenti per nessun $p \in [1, +\infty]$.

2. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_1$ definita da $x_n(k) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{k}{n}}$.
   (a) Calcolare $\|x_n\|_p$ per ogni $p \in [1, +\infty]$;
   (b) Dimostrare che x_n è limitata in ℓ_p se e solo se $p \geq 2$;
   (c) Dimostrare che x_n converge se e solo se $p > 2$ e trovarne il suo limite.

3. Sia $p \in [1, +\infty]$, $a \in \ell_p$ e $L_a : \ell_{\frac{p}{p-1}} \to \mathbb{R}$ l'operatore lineare definito da $L_a(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a(k)x(k)$. Dimostrare che la sua norma operatoriale è $\|L_a\| := \sup_{\|x\|_{\frac{p}{p-1}} \leq 1} |L_a(x)| = \|a\|_p$. Trovare, ove possibile, $x \in \ell_{\frac{p}{p-1}}$ tale che $\|x\|_{\frac{p}{p-1}} = 1$ e $L_a(x) = \|L_a\|$.

4. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e sia f misurabile rispetto a Σ.
   (a) Dimostrare che $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$;
   (b) Dimostrare che se $\mu(X) = +\infty$ allora $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ e quindi $\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\to} \|f\|_\infty$;
   (c) Mostrare con un controesempio che la precedente affermazione è falsa se si toglie l'ipotesi $f \in L^{p_0}(X, \mu)$ per qualche p_0.

5. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e siano $p, q, r \in [1, +\infty]$ con $p < r < q$.
   (a) Dimostrare che ogni $f \in L^p(X, \mu) \cap L^q(\Sigma, \mu)$ verifica
   $$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\frac{p(q-r)}{r(q-p)}} \|f\|_q^{\frac{q(r-p)}{r(q-p)}};$$
   dedurne che $L^p(X, \mu) \cap L^q(X, \mu) \subset \bigcap_{r\in(p,q)} L^r(X, \mu)$.
   (b) Sia ora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata sia in $L^p(X, \mu)$ che in $L^q(X, \mu)$. Dimostrare che se converge a 0 in $L^p(X, \mu)$ oppure in $L^q(X, \mu)$ allora converge a 0 anche in $L^r(X, \mu)$ per ogni $r \in (p, q)$.