Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 5 del 14 Dicembre 2017
Argomento: Spazi L^p

1. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_1$ definita da $x_n(k) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$. Dimostrare che:

   (a) $\|x_n\|_p = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$;

   (b) x_n non ha estratte convergenti per nessun $p \in [1, +\infty]$.

   (a) Se $p = +\infty$ abbiamo $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = 1$, se invece $p \in [1, +\infty)$ allora $\|x\|_p^p = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |x(k)|^p = 1$.

   (b) Se per assurdo fosse $x_{n_j} \underset{j\to+\infty}{\to} x$ per qualche $x \in \ell_p$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ avremmo $\left|x_{n_j}(k) - x(k)\right| \leq \left\|x_{n_j} - x\right\|_p \underset{j\to+\infty}{\to} 0$, cioè $x(k) = \lim\limits_{j\to+\infty} x_{n_j}(k) = 0$, ma questo vorrebbe dire $\left\|x_{n_j}\right\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, in contraddizione con il punto precedente.

2. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_1$ definita da $x_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{k}{n}}$.

   (a) Calcolare $\|x_n\|_p$ per ogni $p \in [1, +\infty]$;

   (b) Dimostrare che x_n è limitata in ℓ_p se e solo se $p \geq 2$;

   (c) Dimostrare che x_n converge se e solo se $p > 2$ e trovarne il suo limite.

   (a) Se $p = \infty$ allora $\|x_n\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k)| = x_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, se invece $p < +\infty$ allora

   $$\|x_n\|^p = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_n(k)|^p = \frac{1}{(\sqrt{n})^p} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{p}{n}}\right)^k = \frac{1}{(\sqrt{n})^p \left(1 - e^{-\frac{p}{n}}\right)},$$

   dunque $\|x_n\|_p = \frac{1}{\sqrt{n}\left(1 - e^{-\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}}$.

   (b) Se $p = \infty$ allora $\|x_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}}$ è limitata; se $p < +\infty$, dallo sviluppo asintotico $1 - e^{-\frac{p}{n}} \sim \frac{p}{n}$ per $n \to +\infty$ deduciamo che $\|x_n\|_p \sim \frac{1}{p^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}}$, che è limitata se e solo se $p \geq 2$.

(c) Se $p < 2$ la successione non può convergere perché è illimitata; se invece $p > 2$ allora $\|x_n\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, dunque la successione converge a 0. Resta da far vedere che non c'è convergenza in ℓ_2: se avessimo $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ avremmo $|x_n(k) - x(k)| \le \|x_n - x\|_2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, cioè $x(k) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n(k) = 0$, ma questo vorrebbe dire che $\|x_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, in contraddizione con i punti precedenti in cui abbiamo ottenuto $\|x_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{n\left(1 - e^{-\frac{2}{n}}\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Sia $p \in [1, +\infty]$, $a \in \ell_p$ e $L_a : \ell_{\frac{p}{p-1}} \to \mathbb{R}$ l'operatore lineare definito da $L_a(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a(k)x(k)$. Dimostrare che la sua norma operatoriale è $\|L_a\| := \sup\limits_{\|x\|_{\frac{p}{p-1}}=1} |L_a(x)| = \|a\|_p$. Trovare, ove possibile, $x \in \ell_{\frac{p}{p-1}}$ tale che $\|x\|_{\frac{p}{p-1}} = 1$ e $L_a(x) = \|L_a\|$.

Dalla ben nota disuguaglianza di Hölder segue $|L_a(x)| \le \|a\|_{\frac{p}{p-1}} \|x\|_p$, e dunque $\|L_a\| \le \|a\|_{\frac{p}{p-1}}$.
Per mostrare che in realtà vale l'uguaglianza cerchiamo $x \in \ell_{\frac{p}{p-1}}$ tale che $\|x\|_{\frac{p}{p-1}} = 1$ e $L_a(x) = \|a\|_p$: questo è banale se $a = 0$, altrimenti per $p \in (1, +\infty)$ è sufficiente porre $x(k) := \dfrac{\mathrm{segno}(a(k))|a(k)|^{p-1}}{\|a\|_p^{p-1}}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$; infatti,

$$\|x\|_{\frac{p}{p-1}}^{\frac{p}{p-1}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{\mathrm{segno}(a(k))|a(k)|^{p-1}}{\|a\|_p^{p-1}}\right|^{\frac{p}{p-1}} = \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |a(k)|^p}{\|a\|_p^p} = 1$$

e inoltre

$$L_a(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a(k)\frac{\mathrm{segno}(a(k))|a(k)|^{p-1}}{\|a\|_p^{p-1}} = \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |a(k)|^p}{\|a\|_p^{p-1}} = \|a\|_p.$$

Per $p = 1$, lo stesso risultato si ottiene ponendo $x(k) = \mathrm{segno}(a(k))$ per ogni k, perché in questo caso $\|x\|_\infty = 1$ e $L_a(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{segno}(a(k))a(k) = \|a\|_1$.
Se invece $p = +\infty$, potrebbe non essere possibile trovare un elemento che massimizzi $\|L_a\|$: lo è se esiste k_0 tale che $|a_{k_0}| = \|a\|_\infty$, e in questo caso basta porre $x(k) = \begin{cases} \mathrm{segno}(a(k_0)) & k = k_0 \\ 0 & k \ne k_0 \end{cases}$: si vede facilmente che $\|x\|_1 = 1$ e $L_a(x) = \mathrm{segno}(a(k_0))a(k_0) = \|a\|_\infty$; se invece non esiste nessun k_0 siffatto, allora non è possibile: infatti, nella disuguaglianza di Hölder

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |a(k)||x(k)| \le \sup_{j\in\mathbb{N}} |a(j)| \sum_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|$$

vale l'uguaglianza solo se $|a(k)||x(k)| = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |a(j)||x(k)|$, cioè se $x(k)$ è nullo per tutti i k in cui $|a(k)| \ne \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |a(j)|$, ma in questo caso è impossibile perché vorrebbe dire $x(k) = 0$ per ogni k mentre sappiamo che $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = 1$; è possibile comunque trovare una successione $x_n \in \ell_1$ con $\|x_n\|_1 = 1$ e $L_a(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \|a\|_\infty$, e dunque dimostrare che $\|L_a\| = \|a\|_\infty$: basta prendere $k_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ tale che $|a(k_n)| \underset{n\to+\infty}{\to} \|a\|_\infty$ e definire $x_n(k) := \begin{cases} \mathrm{segno}(k_n) & k = k_n \\ 0 & k \ne k_n \end{cases}$.

4. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e sia f misurabile rispetto a Σ.

(a) Dimostrare che $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$;

(b) Dimostrare che se $\mu(X) = +\infty$ allora $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ e quindi $\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\to} \|f\|_\infty$;

(c) Mostrare con un controesempio che la precedente affermazione è falsa se si toglie l'ipotesi $f \in L^{p_0}(X,\mu)$ per qualche p_0.

(a) Per ogni $M \in [0, \|f\|_\infty)$ l'insieme $A_M := \{x \in X : |f(x)| \geq M\}$ ha misura positiva $\mu(A_M) > 0$, dunque

$$\|f_p\| \geq \left(\int_{A_M} |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq (\mu(A_M)M^p)^{\frac{1}{p}} = M(\mu(A_M))^{\frac{1}{p}};$$

per $p \to +\infty$ avremo $(\mu(A_M))^{\frac{1}{p}} \underset{p\to+\infty}{\to} 1$ se $\mu(A_M) < +\infty$, oppure $(\mu(A_M))^{\frac{1}{p}} \underset{p\to+\infty}{\to} +\infty$, in ogni caso $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq M$; essendo M arbitrario otteniamo $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

(b) Se $\mu(X) < +\infty$, allora $\|f\|_p \leq \left(\int_X \|f\|_\infty^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty(\mu(X))^{\frac{1}{p}}$ e dunque passando al limite superiore si ottiene $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. Combinando con il punto precedente si ottiene

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty,$$

cioè $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(c) Se $\mu(X) = +\infty$, qualsiasi funzione costante $f \equiv c$ appartiene a $L^\infty(X,\mu)$ ma a nessun $L^p(X,\mu)$, perché $\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu = |c|^p\mu(X) = +\infty$, dunque $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = +\infty$ ma $\|f\|_\infty = c \neq +\infty$.

5. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e siano $p, q, r \in [1, +\infty]$ con $p < r < q$.

(a) Dimostrare che ogni $f \in L^p(X,\mu) \cap L^q(\Sigma,\mu)$ verifica

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\frac{p(q-r)}{r(q-p)}} \|f\|_q^{\frac{q(r-p)}{r(q-p)}};$$

dedurne che $L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu) \subset \bigcap_{r\in(p,q)} L^r(X,\mu)$.

(b) Sia ora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata sia in $L^p(X,\mu)$ che in $L^q(X,\mu)$. Dimostrare che se converge a 0 in $L^p(X,\mu)$ oppure in $L^q(X,\mu)$ allora converge a 0 anche in $L^r(X,\mu)$ per ogni $r \in (p,q)$.

(a) Se $q = +\infty$, allora

$$\int_X |f|^r \mathrm{d}\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^{r-p}|f|^p \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_\infty^{r-p} \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu,$$

ed elevando i due membri a $\frac{1}{r}$ si ottiene $\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\frac{p}{r}} \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{r}}$. Se invece $q < \infty$, essendo $\frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \frac{1}{p}$ possiamo scrivere $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p}$ con $\theta = \frac{p(q-r)}{r(q-p)} \in (0,1)$. Applicando poi la disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati $p' = \dfrac{p}{\theta r}$ e $q' = \dfrac{q}{(1-\theta)r}$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_X |f|^r \mathrm{d}\mu &= \int_X |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} \mathrm{d}\mu \\
&\leq \left(\int_X \left(|f|^{\theta r} \right)^{\frac{p}{\theta r}} \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_X \left(|f|^{(1-\theta)r} \right)^{\frac{q}{(1-\theta)r}} \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}} \\
&= \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{q-r}{q-p}} \left(\int_X |f|^q \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{r-p}{q-p}},
\end{aligned}$$

e la conclusione segue elevando a $\dfrac{1}{r}$. In particolare, se $f \in L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu)$ allora $\|f\|_r < +\infty$ per ogni $r \in (p,q)$ e dunque $f \in \bigcap_{r \in (p,q)} L^r(X,\mu)$.

(b) Se $\|f_n\|_p \leq C$ e $\|f_n\|_q \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, allora per ogni $r \in (p,q)$ il punto precedente implica $\|f_n\|_r \leq C^{\frac{p(q-r)}{r(q-p)}} \|f_n\|_q^{\frac{q(r-p)}{r(q-p)}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Analogamente, se $\|f_n\|_q \leq C$ e $\|f_n\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ allora $\|f_n\|_r \leq C^{\frac{q(r-p)}{r(q-p)}} \|f_n\|_p^{\frac{p(q-r)}{r(q-p)}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.