Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 6 del 21 Dicembre 2017
Argomento: Misure prodotto, misure complesse, spazi duali

1. Sia $f : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty]$ Lebesgue-misurabile e $A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1} : 0 \le y \le f(x)\right\}$.
Dimostrare che A è Lebesgue-misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$ e la sua misura è data da
$$m(A) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura finito, $f : X \to [0, +\infty)$ Σ-misurabile con $\displaystyle\int_X f\mathrm{d}\mu = +\infty$ e $\lambda = f\mu$.
   (a) Dimostrare che λ è assolutamente continua rispetto a μ.
   (b) Dimostrare che per ogni $\delta > 0$ esiste una successione di insiemi Σ-misurabili disgiunti $A_n^\delta \in \Sigma$ tali che $\mu\left(A_n^\delta\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ e $\lambda\left(A_n^\delta\right) \ge \delta$. Confrontare con quanto visto a lezione.
   (Suggerimento: utilizzanre la famiglia di insiemi $B_{l,m} := \{x \in X : l < f(x) \le m\}$)

3. Sia $L_n : C([-1, 1]) \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare dato da
$$L_n(f) := \int_0^1 e^{-nx} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 \frac{n}{1 + n^2x^2} f(x)\mathrm{d}x.$$
   (a) Calcolare la norma operatoriale $\|L_n\|$ e dedurre che $\{L_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata per ogni $f \in C([-1, 1])$.
   (b) Trovare una misura con segno di Borel regolare μ tale che $L_n(f) \underset{n\to+\infty}{\to} \displaystyle\int_{-1}^1 f\mathrm{d}\mu$ per ogni $f \in C([-1, 1])$.

4. Sia (X, Σ, μ) lo spazio misura definito da: $X = \{0, 1\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(X)$, $\mu(\{0\}) = 1$, $\mu(\{1\}) = +\infty$.
   (a) Descrivere gli spazi $L^p(X, \Sigma, \mu)$ al variare di $p \in [1, +\infty]$.
   (b) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty)$ vale l'isomorfismo canonico tra $(L^p(X, \Sigma, \mu))^*$ e $L^{\frac{p}{p-1}}(X, \Sigma, \mu)$ e confrontare con quanto visto a lezione.

5. Sia $a(j, k) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\sum_{j,k} |a(j, k)| < +\infty$.
   (a) Dimostrare che $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a(j, k)\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a(j, k)\right)$.

(b) Sia ora $b(j,k) := \begin{cases} 1 & k = j \\ -1 & k = j+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Dimostrare che $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} b(j,k) \right) \neq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b(j,k) \right)$ e spiegare perché ciò non è in contraddizione con il punto precedente.

6. Sia (X, Σ, μ) uno spazio di misura complessa e

$$N(\mu) := \sup\{|\mu(A)| : A \in \Sigma\}.$$

Dimostrare che:

(a) $N(\mu)$ è una norma sullo spazio delle misure complesse su Σ.

(b) Le norme $N(\mu)$ e $|\mu|(X)$ sono equivalenti.

(Suggerimento: utilizzare che, dati $\{z_1, \ldots, z_N\}$, esiste $\mathcal{S} \subset \{1, \ldots, N\}$ tale che $\displaystyle\left| \sum_{n\in\mathcal{S}} z_n \right| \geq \sum_{n=1}^{N} |z_n|$)