Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 6 del 21 Dicembre 2017
Argomento: Misure prodotto, misure complesse, spazi duali

1. Sia $f:\mathbb{R}^N\to[0,+\infty]$ Lebesgue-misurabile e $A:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{N+1}:0\le y\le f(x)\right\}$.
Dimostrare che A è Lebesgue-misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$ e la sua misura è data da

$$m(A)=\int_{\mathbb{R}^N}f(x)\mathrm{d}x.$$

Scrivendo $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{N+1}:y\ge0\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{N+1}:y-f(x)\le0\right\}$ otteniamo che è Lebesgue-misurabile in quanto intersezione di due misurabili: il primo lo è perché chiuso, il secondo perché preimmagine del chiuso $[-\infty,0]$ rispetto alla funzione Lebesgue-misurabile $(x,y)\mapsto y-f(x)$. Per calcolarne la misura applichiamo il teorema di Tonelli alla funzione positiva e misurabile $h(x,y)=\chi_A(x,y)$:

$$m(A)=\int_{\mathbb{R}^N\times[0,+\infty]}h(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}h(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}\chi_{[0,f(x)]}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Sia (X,Σ,μ) uno spazio misura finito, $f:X\to[0,+\infty)$ Σ-misurabile con $\displaystyle\int_X f\mathrm{d}\mu=+\infty$ e $\lambda=f\mu$.

   (a) Dimostrare che λ è assolutamente continua rispetto a μ.

   (b) Dimostrare che per ogni $\delta>0$ esiste una successione di insiemi Σ-misurabili disgiunti $A_n^\delta\in\Sigma$ tali che $\mu\left(A_n^\delta\right)\underset{n\to+\infty}{\to}0$ e $\lambda\left(A_n^\delta\right)\ge\delta$. Confrontare con quanto visto a lezione. (Suggerimento: utilizzanre la famiglia di insiemi $B_{l,m}:=\{x\in X:l<f(x)\le m\}$)

   (a) L'assoluta continuità segue dal fatto elementare che se $\mu(A)=0$ allora $\lambda(A)=\displaystyle\int_A f\mathrm{d}\mu=0$.

   (b) Notiamo innanzi tutto che, fissato m, la famiglia $B_{l,m}$ è una famiglia crescente di insiemi misurabili con $\displaystyle\bigcup_{m=l+1}^{+\infty}B_{l,m}=\{x\in X:f(x)>l\}:=C_l$, che verifica $\lambda(C_l)=\lambda(X)-\displaystyle\int_{\{f\le l\}}f\mathrm{d}\mu\ge\lambda(X)-l\mu(X)=+\infty$. Dunque, per ogni l $\lambda(B_{l,m})\underset{m\to+\infty}{\to}+\infty$ e quindi comunque fisso $\delta>0$ esisterà un certo $m_1=m_1(\delta)$ tale che $\lambda(A_{0,m_1})\ge\delta$; analogamente, poiché $\lambda(A_{m_1,m})\underset{m\to+\infty}{\to}+\infty$, esisterà $m_2>m_1$ tale che $\lambda(A_{m_2,m_1})\ge\delta$. Ripetendo la procedura troveremo una successioni di misurabili disgiunti $A_n^\delta:=B_{m_n,m_{n-1}}$ tale che $\lambda\left(A_n^\delta\right)\ge\delta$, e inoltre $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu\left(A_n^\delta\right)=\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n^\delta\right)\le\mu(X)=+\infty$, dunque $\mu\left(A_n^\delta\right)\underset{n\to+\infty}{\to}0$.
   Questo non contraddice la caratterizzazione dell'assoluta continuità vista a lezione perché quest'ultima vale solo per misure con variazione totale finita, condizione non verificata in questo caso dal momento che $\lambda(X)=+\infty$.

3. Sia $L_n : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare dato da

$$L_n(f) := \int_0^1 e^{-nx} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 \frac{n}{1+n^2x^2} f(x)\mathrm{d}x.$$

(a) Calcolare la norma operatoriale $\|L_n\|$ e dedurre che $\{L_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata per ogni $f \in C([-1,1])$.

(b) Trovare una misura con segno di Borel regolare μ tale che $L_n(f) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{-1}^1 f\mathrm{d}\mu$ per ogni $f \in C([-1,1])$.

(a) Poiché il funzionale è rappresentato dalla misura con segno $\mu_n = \left(e^{-nx}\chi_{[0,1]} - \frac{n}{1+n^2x^2}\chi_{[-1,0]}\right) m$, dal Teorema di Riesz la sua norma operatoriale sarà data dalla variazione totale della misura, che è

$$\begin{aligned}
|\mu_n|([-1,1]) &= \left(e^{-nx}\chi_{[0,1]} + \frac{n}{1+n^2x^2}\chi_{[-1,0]}\right) m([-1,1]) \\
&= \int_0^1 e^{-nx}\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 \frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 + [\arctan(nx)]_{-1}^0 \\
&= \frac{1-e^{-n}}{n} - \arctan(-n).
\end{aligned}$$

Essendo quest'ultima quantità limitata in n, allora per ogni $f \in C([-1,1])$ deduciamo $\sup_{n\in\mathbb{N}} |L_n(f)| \le \|f\|_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\| < +\infty$.

(b) Per poter passare al limite per $n \to +\infty$, applichiamo il cambio di variabile $y = nx$ e scriviamo

$$L_n(f) := \int_0^1 e^{-nx} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-n}^0 \frac{1}{1+y^2} f\left(\frac{y}{n}\right)\mathrm{d}y.$$

A questo punto, poiché $\left|f(x)e^{-nx}\right| \le \|f\|_\infty$ per $x \in [0,1]$ e $\left|\frac{1}{1+y^2} f\left(\frac{y}{n}\right)\chi_{[-n,0]}\right| \le \frac{1}{1+y^2}\|f\|_\infty$ per $y \in (-\infty, 0]$, possiamo applicare a entrambi gli integrali il teorema di convergenza dominata e sfruttare la continuità di f:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} L_n(f) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 e^{-nx} f(x)\mathrm{d}x - \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+y^2} f\left(\frac{y}{n}\right)\chi_{[-n,0]}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} e^{-nx} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+y^2} f\left(\frac{y}{n}\right)\chi_{[-n,0]}\mathrm{d}y \\
&= -\left(\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y\right) f(0) \\
&= -\frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 f\mathrm{d}(\delta_0).
\end{aligned}$$

Dunque abbiamo dimostrato che $L_n(f) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{-1}^1 f\mathrm{d}\mu$ con $\mu = -\frac{\pi}{2}\delta_0$, dove δ_0 è la misura di Dirac definita da $\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$

4. Sia (X, Σ, μ) lo spazio misura definito da: $X = \{0, 1\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(X)$, $\mu(\{0\}) = 1$, $\mu(\{1\}) = +\infty$.
   (a) Descrivere gli spazi $L^p(X, \Sigma, \mu)$ al variare di $p \in [1, +\infty]$.
   (b) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ vale l'isomorfismo canonico tra $(L^p(X, \Sigma, \mu))^*$ e $L^{\frac{p}{p-1}}(X, \Sigma, \mu)$ e confrontare con quanto visto a lezione.

(a) Innanzi tutto, osserviamo che se $f(1) \neq 0$ allora $\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu = +\infty$, se invece $f(1) = 0$ abbiamo $\int_X |f|^p = |f(0)|^p$, dunque per ogni $p \neq \infty$ ho

$$L^p(X, \Sigma, \mu) = \{f : \{0, 1\} \to \mathbb{R}; f(1) = 0\}$$

Quanto a $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ invece, essendo X finito, per ogni scelta di $f(0), f(1)$ avrò una funzione essenzialmente limitate e dunque

$$L^\infty(X, \Sigma, \mu) = \{f : \{0, 1\} \to \mathbb{R}\}.$$

(b) Per ogni $p \in [1, +\infty)$ ogni funzione in $L^p(X, \Sigma, \mu)$ è determinata dal valore di $f(0)$, dunque ogni funzionale lineare continuo $L : L^p(X, \Sigma, \mu) \to \mathbb{R}$ sarà del tipo $L(f) = cf(0)$ per qualche $c \in \mathbb{R}$, e inoltre $L(f) = cf(0) = \int_X f g_c \mathrm{d}\mu$ per g_c definita da $g_c(0) = c$ e $g_c(1) = 0$. Per $p > 1$ otteniamo, al variare di c, tutto lo spazio $L^{\frac{p}{p-1}}(X, \Sigma, \mu)$, e dunque abbiamo l'isomorfismo canonico tra $(L^p(X, \Sigma, \mu))^*$ e $L^{\frac{p}{p-1}}(X, \Sigma, \mu)$. Se invece $p = 1$ non otteniamo tutto lo spazio $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ perché ad esempio nessun elemento è rappresentato dalla g data da $g(0) = 0, g(1) = 1$.
Questo non contraddice i risultati visti a lezione sui duali degli spazi L^p, che valgono per spazi misura σ-finiti, quale non è X.

5. Sia $a(j, k) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che $\sum_{j,k} |a(j, k)| < +\infty$.
   (a) Dimostrare che $\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} a(j, k) \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a(j, k) \right)$.
   (b) Sia ora $b(j, k) := \begin{cases} 1 & k = j \\ -1 & k = j + 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Dimostrare che $\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} b(j, k) \right) \neq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b(j, k) \right)$ e spiegare perché ciò non è in contraddizione con il punto precedente.

(a) Le due sommatorie coincidono per il teorema di Fubini, applicato con $(X_1, \Sigma_1, \mu_1) = (X_2, \Sigma_2, \mu_2) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ dove μ è la misura del conteggio; il teorema può essere applicato in quanto $\int_{X_1 \times X_2} |a(j, k)| \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) = \sum_{j,k} |a(j, k)|$ è finito per ipotesi. Dunque otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} a(j, k) \right) &= \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} aj, k) \mathrm{d}\mu_2(k) \right) \mathrm{d}\mu_1(j) \\ &= \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} a(j, k) \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2)(j, k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} aj,k) \mathrm{d}\mu_1(j) \right) \mathrm{d}\mu_2(k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a(j,k) \right).
\end{aligned}
$$

(b) Si vede facilmente che $\sum_{k\in\mathbb{N}} b(j,k) = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $\sum_{k\in\mathbb{N}} b(j,k) = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j \geq 1 \end{cases}$, dunque

$$
\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a(j,k) \right) = 0 \neq 1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a(j,k) \right).
$$

Non vale il risultato precedente perché non è soddisfatta la condizione $\sum_{j,k} |a(j,k)| < +\infty$, in quanto

$$
\sum_{j,k} |a(j,k)| = \sum_{k=j} 1 + \sum_{k=j+1} 1 = +\infty.
$$

6. Sia (X, Σ, μ) uno spazio di misura complessa e

$$
N(\mu) := \sup\{|\mu(A)| : A \in \Sigma\}.
$$

Dimostrare che:

(a) $N(\mu)$ è una norma sullo spazio delle misure complesse su Σ.
(b) Le norme $N(\mu)$ e $|\mu|(X)$ sono equivalenti.

(Suggerimento: utilizzare che, dati $\{z_1, \ldots, z_N\}$, esiste $\mathcal{S} \subset \{1, \ldots, N\}$ tale che $\left| \sum_{n\in\mathcal{S}} z_n \right| \geq \sum_{n=1}^{N} |z_n|$)

(a) Verifichiamo le tre proprietà che caratterizzano la norma. Innanzi tutto, è chiaramente vero che $N(\mu) \geq 0$, e $N(\mu) = 0$ se e solo se $|\mu(A)| = 0$ per ogni $A \in \Sigma$, cioè μ è la misura nulla. Inoltre, per ogni $t > 0$ abbiamo

$$
N(t\mu) = \sup\{|t\mu(A)| : A \in \Sigma\} = \sup\{|t||\mu(A)| : A \in \Sigma\} = |t| \sup\{|\mu(A)| : A \in \Sigma\} = |t|N(\mu).
$$

Infine, date due misure μ_1, μ_2,

$$
\begin{aligned}
N(\mu_1 + \mu_2) &= \sup\{|\mu_1(A) + \mu_2(A)| : A \in \Sigma\} \\
&\leq \sup\{|\mu_1(A)| + |\mu_2(A)| : A \in \Sigma\} \\
&\leq \sup\{|\mu_1(A)| : A \in \Sigma\} + \sup\{|\mu_2(A)| : A \in \Sigma\} \\
&= N(\mu_1) + N(\mu_2).
\end{aligned}
$$

(b) La disuguaglianza $N(\mu) \leq |\mu|(X)$ segue dalla definizione $|\mu|(X) = \sup \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)|;\ A_n \in \Sigma,\ \coprod_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \right\}$: per ogni partizione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vale ovviamente $|\mu(A_1)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)|$ e passando all'estremo superiore si ottiene la disuguaglianza. Viceversa, scegliendo $A_1, \ldots, A_N$ tali che $\sum_{n=1}^{N} |\mu(A_n)| \geq |\mu|(X) - \varepsilon$ e applicando il suggerimento, troviamo $\mathcal{S} \subset \{1, \ldots, N\}$ tale che

$$
|\mu|(X) - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{N} |\mu(A_n)| \leq 6 \left| \sum_{n\in\mathcal{S}} \mu(A_n) \right| = 6 \left| \mu\left(\bigcup_{n\in\mathcal{S}} A_n \right) \right| \leq 6N(\mu),
$$

dunque $|\mu|(X) \leq 6N(\mu)$, che dimostra l'equivalenza tra le norme.