ESEMPI

① $A: l_2 \to l_2$ $\qquad$ $\sigma(A) = \underbrace{\{\tfrac{1}{k}\}}_{\sigma_p(A)} \cup \underbrace{\{0\}}_{\sigma_c(A)}$

$x(k) \to \frac{x(k)}{k}$

② $A: l_2 \to l_2$ $\qquad$ $\sigma(A) \subset \{|\lambda| \leq \|A\| = 1\}$

$(x(1), x(2), \dots) \to (x(2), x(3), \dots)$

CERCO GLI AUTOVALORI $\quad Ax = \lambda x$

$x(2) = \lambda x(1)$
$x(3) = \lambda x(2) = \lambda^2 x(1)$
$x(4) = \lambda x(3) = \lambda^3 x(1)$
$\dots$

$x = (x(1), \lambda x(1), \lambda^2 x(1) \dots) \in l_2$

$\|x\|^2 = |x(1)|^2 \sum_{k \geq 1} |\lambda|^{2k} < +\infty \iff |\lambda| < 1$

$|\lambda| < 1 \Rightarrow$ AUTOVALORI

$|\lambda| > 1 \Rightarrow \lambda \notin \sigma(A)$

$|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$ PERCHÉ $\sigma(A)$ CHIUSO

$|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \in \sigma_c(A)$ PERCHÉ $\overline{ran(A - \lambda I)} = l_2$, INFATTI $e_n = ran(A - \lambda I)$:

$(A - \lambda I)x = e_n \iff$

$x(2) - \lambda x(1) = 0$
$\vdots$
$x(n) - \lambda x(n-1) = 0 \Rightarrow x(n-1) = \frac{x(n)}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2}$
$x(n+1) - \lambda x(n) = 1 \Rightarrow x(n) = -\frac{1}{\lambda}$
$x(n+2) - \lambda x(n+1) = 0$

$\Rightarrow x = \left(-\frac{1}{\lambda^n}, \dots, -\frac{1}{\lambda}, 0, \dots\right) \Rightarrow ran(A - \lambda I) \supset span\{e_n\} \Rightarrow$ DENSO

---

③ $A: l_2 \to l_2$ $\qquad$ SHIFT DESTRO

$(x(1), x(2), \dots) \to (0, x(1), x(2), \dots)$

$0 \in \sigma_r(A)$ PERCHÉ $e_1 \in \overline{ran(A)}$

VALE LO STESSO SE $|\lambda| < 1 \Rightarrow \lambda \in \sigma_r(A)$ PERCHÉ $e_1 \notin \overline{ran(A - \lambda I)}$

INFATTI, $e_1 + y \notin ran(A - \lambda I)$ SE $\|y\| \leq \varepsilon \ll 1$

SE FOSSE $e_1 + y = (A - \lambda I)x \Rightarrow x(k) = -\frac{1}{\lambda^k} - \frac{y(1)}{\lambda^k} - \frac{y(2)}{\lambda^{k-1}} - \dots \frac{y(k)}{\lambda}$

MA $x \notin l_2$ PERCHÉ $x(k) \not\to 0$:

$$|x(k)| \geq \frac{|-1 - \lambda y(1) - \lambda^2 y(2) \dots|}{|\lambda|^k} \geq \frac{1 - \|y\|_\infty (|\lambda| + \dots + |\lambda|^{k-1})}{|\lambda|^k} \geq \frac{1 - \|y\|_{l_2} \overbrace{\frac{1}{1-|\lambda|}}^{\text{SERIE GEO.}}}{|\lambda|^k}$$

SE $\|y\|_{l_2} < 1 - |\lambda|$, $|x(k)| \not\to 0$, QUINDI $|\lambda| < 1 \Rightarrow \sigma_r(A)$

SE $\|y\|_{\ell_2} < 1-|\lambda|$, $|x(k)| \to 0$, QUINDI

$|\lambda|<1 \Rightarrow \sigma_r(A)$
$|\lambda|>1=\|A\| \Rightarrow \lambda \notin \sigma(A)$
$|\lambda|=1 \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$ PERCHÉ CHIUSO

$\cancel{\sigma_p(A)}$ $\quad \sigma_c(A) \quad \sigma_r(A)$

FACCIO VEDERE CHE A NON HA AUTOVALORI!

SE $Ax=\lambda x$:
$0=\lambda x(1) \Rightarrow x(1)=0$
$x(1)=\lambda x(2) \Rightarrow x(2)=\frac{x(1)}{\lambda}=0$
$x(2)=\lambda x(3)$ ....

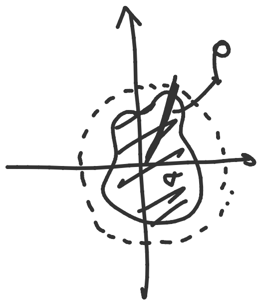
$|\lambda|=1 \Rightarrow \lambda \in \sigma_c(A)$ PERCHÉ $\mathrm{ran}(A-\lambda I)$ È DENSO, PERCHÉ SE $L \in \ell_2^*$ SI ANNULLA SU $\mathrm{ran}(A-\lambda I)$, ALLORA $L \equiv 0$, CIOÈ:

$$(y,(A-\lambda I)x)=0 \quad \forall x \in \ell_2 \Rightarrow y \equiv 0.$$

SCELGO $x=e_n \Rightarrow y(n-1)=\lambda y(n) \ \forall n \Rightarrow y(n)=\frac{c}{\lambda^n}$

MA $|\lambda|=1$, $y \in \ell_2$ IMPOSSIBILE A MENO CHE $c=0$ CIOÈ $y \equiv 0$.

DEF IL RAGGIO SPETTRALE DI $A \in \mathcal{L}(X)$ (X BANACH COMPLESSO) È LA MASSIMA NORMA DEGLI ELEMENTI DELLO SPETTRO DI A, CIOÈ:



$$\underbrace{\rho(A)}_{\text{NOTAZIONE}} = \sup_{\max} \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

$\rho(A) \le \|A\|$

ESEMPI (1) $A:\ell_2 \to \ell_2$ SHIFT DESTRO/SINISTRO OPPURE $Ax(k)=\frac{x(k)}{k}$

IN TUTTI E TRE I CASI, $\|A\|=1=\rho(A)$

(2) POTREBBE VALERE $\rho(A)<\|A\|$ $\quad A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (y,0)$ $\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$\|A\|=1$ MA $\sigma=\{0\} \Rightarrow \rho(A)=\{0\}$

TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DEL RAGGIO SPETTRALE)

① $\sigma(A) \neq \emptyset$

② $\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

$\boxed{\text{OSS}}$ $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ (DANDO PER BUONO CHE ESISTE) È $\leq \|A\|$

PERCHÉ $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

$\boxed{\text{LEMMA}}$ PER OGNI POLINOMIO $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ VALE $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$

$$p(\sigma(A)) = \{p(z) : z \in \sigma(A)\}$$

DIM

$\lambda \in \sigma(p(A)) \overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow} p(A) - \lambda\mathbb{I}$ NON INVERTIBILE $\Longleftrightarrow A - \alpha_j(\lambda)$ NON INVERTIBILE

$\Longleftrightarrow \alpha_j(\lambda) \in \sigma(A)$

$\Longleftrightarrow \lambda = p(\alpha_j(\lambda)) \in p(\sigma(A))$

$z = \alpha_j(\lambda)$

$p(z) - \lambda = a\,(z - \alpha_1(\lambda))^{n_1}(z - \alpha_2(\lambda))^{n_2} \cdots$

$p(A) - \lambda = a\,(A - \alpha_1(\lambda)\mathbb{I})^{n_1} \cdots (A - \alpha_J(\lambda)\mathbb{I})^{n_J}$

$\boxed{\text{COR}}$ $\rho(A) \leq \inf_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

DIM APPLICO IL LEMMA CON $p(z) = z^n$: $\sigma(A^n) = \sigma(A)^n$

$\rho(A)^n = \rho(A^n) \leq \|A^n\| \Rightarrow \rho(A) \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, PASSO AL LIMINF.

DIM. DEL TEO

TEOREMA DI LIOUVILLE: SE $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ È DERIVABILE E LIMITATA ALLORA f È COSTANTE ($f = \frac{1}{p(z)} \Rightarrow p$ HA DEGLI ZERI TEO. FOND. ALGEBRA)

$(\forall L \in \mathcal{L}(X)^*$, CONSIDERO $Lf: \mathbb{C} \to \mathbb{C})$

$$f: \mathbb{C} \to \mathcal{L}(X)$$
$$\lambda \to (A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$$

È BEN DEFINITA SU $\mathbb{C}$ SE $\sigma(A) = \emptyset$. FACCIAMO VEDERE CHE OTTERREMMO UNA CONTRADDIZIONE.

$\frac{1}{a-\lambda} \rightsquigarrow \frac{1}{(a-\lambda)^2}$

$(A-\lambda\mathbb{I})^{-1} \rightsquigarrow (A-\lambda\mathbb{I})^{-2}$

FACCIO VEDERE CHE f È DERIVABILE:

$$\frac{f(\lambda+\mu) - f(\lambda)}{\mu} = \frac{(A - (\lambda+\mu)\mathbb{I})^{-1} - (A - \lambda\mathbb{I})^{-1}}{\mu}$$

$$= \underline{(A-\lambda I)(A-(\lambda+\mu)I)^{-1}(A-\lambda I)^{-1} - (A-(\lambda+\mu)I)(A-(\lambda+\mu)I)^{-1}(A-\lambda I)^{-1}}$$

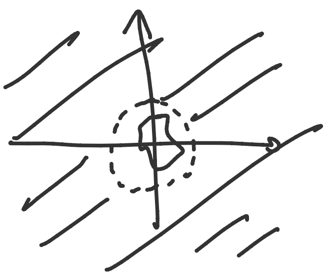
$$= \frac{\cancel{\mu} I\,(A-(\lambda+\mu)I)^{-1}(A-\lambda I)^{-1}\ \mu}{\cancel{\mu}} \xrightarrow[\mu\to 0]{} (A-\lambda I)^{-2}.$$

$$f(\lambda) = \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \downarrow \\ 0}} \underbrace{\left(\frac{A}{\lambda} - I\right)^{-1}}_{\substack{\text{LIMITATA} \\ \text{SE } |\lambda| \text{ GRANDE}}} \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} 0$$

. SE $\sigma(A)=\emptyset$ ALLORA f SAREBBE DERIVABILE SU $\mathbb{C}$ E LIMITATA $\Rightarrow$ COSTANTE
IMPOSSIBILE! $f=(A-\lambda I)^{-1}$ $\Rightarrow$ $\sigma(A) \neq \emptyset$

(2) DEVO DIMOSTRARE $\rho(A) \geq \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

$f(\lambda)$ È OLOMORFA $\Rightarrow$ LA SERIE DI POTENZE CONVERGE SULLA CORONA CIRCOLARE PIÙ GRANDE DOVE È OLOMORFA, CIOÈ $\mathbb{C} \setminus B_{\rho(A)}$



$$f(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$$

CRITERIO DELLA RADICE: CONVERGE SE

$$\frac{1}{\lambda} \limsup \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\|A^n\|}{|\lambda^n|}} < 1$$

DUNQUE $\lambda \in \mathbb{C} \setminus B_{\rho(A)} \Rightarrow |\lambda| > \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ $\qquad |\lambda| = \rho(A)+\varepsilon$

SE $|\lambda| \to \rho(A)$ $\Rightarrow$ $\rho(A) \geq \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. $\qquad \rho(A)+\varepsilon > \limsup$

PROSSIMO EPISODIO: TEOREMA SPETTRALE PER OP. <u>COMPATTI</u>

$I - A$ CON A COMPATTO.