Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 1 del 4 Ottobre 2018
Argomento: Misure, passaggio al limite sotto integrale

1. Sia f continua e non negativa su $\mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$.
   Dimostrare che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\searrow} 0$.

2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k}\cos\frac{1}{nk}$.

3. Utilizzando la serie di funzioni definita da $f_n(x) = xe^{-nx}$ per $n \geq 1$, dimostrare l'uguaglianza
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

4. Utilizzando il teorema di convergenza equidominata, calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{nx}}{n+e^{(n+1)x}}\mathrm{d}x; \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{n\cos^2 x}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x.$$

5. Sia Σ la famiglia di insiemi definita da
$$\Sigma := \{A\subset\mathbb{R}:\ (0,+\infty)\subset A \text{ oppure } A\subset(-\infty,0]\}.$$
   Dimostrare che Σ è una σ-algebra su $\mathbb{R}$ e che la funzione $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A\cap(0,+\infty)\neq\emptyset \\ 0 & \text{se } A\subset(-\infty,0]\end{cases}$
   è una misura su Σ.
   Dimostrare che μ non è una misura sui Boreliani di $\mathbb{R}$.
   Dimostrare che una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è Σ-misurabile se e solo se è costante su $(0,+\infty)$.
   Dimostrare che, se $f|_{(0,+\infty)}\equiv c$, allora $\displaystyle\int_A f\mathrm{d}\mu = \begin{cases} c & \text{se } A\cap(0,+\infty)\neq\emptyset \\ 0 & \text{se } A\subset(-\infty,0]\end{cases}$ per ogni $A\in\Sigma$.