Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 1 del 4 Ottobre 2018
Argomento: Misure, passaggio al limite sotto integrale

1. Sia f misurabile e non negativa su $\mathbb{R}$ tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

   Dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\searrow} 0$.

   Scrivendo $\frac{f(x)}{1+nx^2} = f(x) - \frac{nx^2 f(x)}{1+nx^2}$, dalla linearità dell'integrale abbiamo

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^2 f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x,$$

   dunque ci basterà mostrare che

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^2 f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

   Quest'ultimo limite si ottiene grazie al teorema di convergenza monotona, perché la successione $f_n(x) = \frac{nx^2 f(x)}{1+nx^2}$ converge a $f(x)$ in maniera monotona crescente.

2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} \cos\frac{1}{nk}$.

   Se μ è la misura del conteggio su $\mathbb{N}$, allora possiamo riscrivere la serie come $\int_{\mathbb{N}} f_n(k)\mathrm{d}\mu(k)$, con $f_n(k) = e^{-k}\cos\frac{1}{nk}$.
   Poiché le f_n sono funzioni non negative e $f_n(k) \underset{n\to+\infty}{\nearrow} e^{-k} := f(k)$, allora possiamo applicare il teorema della convergenza monotona:

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n(k)\mathrm{d}\mu(k) = \int_{\mathbb{N}} f(k)\mathrm{d}\mu(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e-1}.$$

3. Utilizzando la serie di funzioni definita da $f_n(x) = xe^{-nx}$ per $n \geq 1$, dimostrare l'uguaglianza

   $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

   Innanzitutto, poiché le f_n sono non negative allora si può applicare il teorema della convergenza monotona alla successione delle somme parziali $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ e scambiare serie e

integrali: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$
Nel membro di sinistra, dalla somma della serie geometrica otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-x}\right)^n = x\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-1\right) = \frac{x}{e^x-1}.$$

A destra invece, integrando per parti, si ottiene

$$\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{n}\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

Dunque otteniamo l'uguaglianza

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

4. Utilizzando il teorema di convergenza equidominata, calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{nx}}{n+e^{(n+1)x}}\mathrm{d}x; \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{n\cos^2 x}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x.$$

La successione $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{n+e^{(n+1)x}}$ converge a $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x\le 0\end{cases}$. Per poter applicare il teorema di convergenza dominata è necessario trovare una maggiorante integrabile g con $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x < +\infty$.
Per $x\ge 0$ abbiamo $f_n(x) \le \dfrac{e^{nx}}{e^{(n+1)x}} = e^{-x}$, mentre per $x<0$ vale $f_n(x)\le \dfrac{e^{nx}}{n}\le e^{nx}\le e^x$.
Dunque, $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x>0 \\ e^{x} & \text{se } x\le 0\end{cases}$ è una maggiorante integrabile che permette di scambiare limite e integrale:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = \left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

La successione $f_n(x) := \dfrac{n\cos^2 x}{1+n^2x^2}$ converge a 0 per ogni $x\in[0,\pi]$, ma non soddisfa le ipotesi del teorema di convergenza equidominata (né del teorema di convergenza monotona). Tuttavia, con il cambio di variabile $y = nx$ otteniamo

$$\int_0^{\pi}\frac{n\cos^2 x}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi n}\frac{\cos^2\frac{y}{n}}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\frac{\cos^2\frac{y}{n}}{1+y^2}\chi_{[0,\pi n]}\mathrm{d}y.$$

La successione $h_n(y) := \dfrac{\cos^2\frac{y}{n}}{1+y^2}\chi_{[0,\pi n]}$ converge a $h(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$ per ogni $y\in[0,+\infty)$. Inoltre, essendo $\left|\cos^2\dfrac{y}{n}\right|\chi_{[0,\pi n]}\le 1$, abbiamo $h_n(y)\le h(y)$, dunque la stessa $h(y)$ è una maggiorante integrabile che permette di applicare il teorema di convergenza dominata e scambiare limite e integrale:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{n\cos^2 x}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2\frac{y}{n}}{1+y^2}\chi_{[0,\pi n]}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos^2\frac{y}{n}}{1+y^2}\chi_{[0,\pi n]}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} \\
&= [\arctan y]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Notare che, passando a limite dentro il primo integrale, si sarebbe ottenuto un risultato errato.

5. Sia Σ la famiglia di insiemi definita da

$$\Sigma := \{A \subset \mathbb{R} : (0,+\infty) \subset A \text{ oppure } A \subset (-\infty, 0]\}.$$

Dimostrare che Σ è una σ-algebra su $\mathbb{R}$ e che la funzione $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \cap (0,+\infty) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A \subset (-\infty, 0] \end{cases}$ è una misura su Σ.
Dimostrare che μ non è una misura sui Boreliani di $\mathbb{R}$.
Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Σ-misurabile se e solo se è costante su $(0,+\infty)$.
Dimostrare che, se $f|_{(0,+\infty)} \equiv c$, allora $\displaystyle\int_A f \mathrm{d}\mu = \begin{cases} c & \text{se } A \cap (0,+\infty) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A \subset (-\infty, 0] \end{cases}$ per ogni $A \in \Sigma$.

Verifichiamo che Σ è una σ-algebra su $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \in \Sigma$ perché ovviamente $(0,+\infty) \subset \mathbb{R}$; inoltre, è chiusa rispetto al passaggio al complementare perché se $(0,+\infty) \subset A$ allora $A^c \subset (-\infty, 0]$; infine, presi $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \Sigma$, se $(0,+\infty) \subset A_{n_0}$ per almeno un n_0, allora $(0,+\infty) \subset A_{n_0} \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, se invece $A_n \subset (-\infty, 0]$ per ogni n allora $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset (-\infty, 0]$, in ogni caso $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \Sigma$.
Per verificare che μ è una misura su Σ notiamo che, presa una famiglia di insiemi a due a due disgiunti $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, allora saranno tutti contenuti in $(-\infty, 0]$ oppure solamente uno verificherà $(0,+\infty) \subset A_{n_0}$. Nel primo caso, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset (-\infty, 0]$ e dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = 0 = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right);$$

nel secondo caso invece $(0,+\infty) \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \mu(A_{n_0}) = 1 = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

In entrambi casi, l'additività numerabile è verificata e dunque μ è una misura su Σ.
μ non è una misura sui Boreliani di $\mathbb{R}$ perché, presi ad esempio i due boreliani disgiunti $A := (0,1)$ e $B := [1,2)$, allora $\mu(A) + \mu(B) = 2$ ma $\mu(A \cup B) = 1$.
Prendiamo ora f costantemente c su $(0,+\infty)$ e prendiamo un aperto $A \subset \mathbb{R}$. Se $c \notin A$, allora $f^{-1}(A) \subset (0,+\infty)$ e dunque appartiene a Σ. Altrimenti, $f^{-1}(A) = (0,+\infty) \cup \left(f^{-1}(A) \cap (-\infty, 0]\right)$ è un unione di due insiemi Σ-misurabili e dunque è anch'esso Σ-misurabile. In ogni caso, $f^{-1}(A) \in \Sigma$ e quindi f è Σ-misurabile.
Supponiamo invece che f non sia costante su $(0,+\infty)$, cioè che esistano due $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ con $f(x_1) \neq f(x_2)$. Prendiamo ora un aperto $A \subset \mathbb{R}$ contenente $f(x_1)$ ma non $f(x_2)$ e consideriamo $f^{-1}(A)$: sicuramente non conterrà tutta la semiretta $(0,+\infty)$, perché non contiene x_2, e inoltre non sarà contenuto in $(-\infty, 0]$ perché contiene x_1; dunque, $f^{-1}(A) \notin \Sigma$ e dunque f non è Σ-misurabile.
Se $f|_{(0,+\infty)} \equiv c$, allora councide con la funzione costantemente uguale a c a meno di un insieme di misura nulla. Dunque, il suo integrale su $A \in \Sigma$ coinciderà con quello della costante c, che per definizione vale

$$\int_A f \mathrm{d}\mu \int_A c \mathrm{d}\mu = c\mu(A) = \begin{cases} c & \text{se } A \cap (0,+\infty) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A \subset (-\infty, 0) \end{cases}.$$