Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 2 del 25 Ottobre 2018
Argomento: Misure, passaggio al limite sotto integrale

1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Calcolare:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x$;

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)\cos\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x$;

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)\arctan\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

   (a) $\displaystyle\frac{f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $x\neq 0$, e inoltre $\displaystyle\left|\frac{f(x)}{1+nx^2}\right| \leq |f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$, dunque si può applicare il teorema di convergenza dominata:

   $$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}0\mathrm{d}x = 0.$$

   (b) Utilizzando il cambio di variabile $y = x + 2\pi n$ e la periodicità del coseno si ottiene

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)\cos\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\left(\frac{y}{n}-2\pi\right)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\left(\frac{y}{n}\right)\mathrm{d}y;$$

   a questo punto, poiché $f(y)\cos\left(\frac{y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} f(y)$ per ogni $y\in\mathbb{R}$ e $\left|f(y)\cos\left(\frac{y}{n}\right)\right| \leq |f(y)| \in L^1(\mathbb{R})$, allora si può applicare il teorema di convergenza dominata:

   $$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)\cos\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\left(\frac{y}{n}\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f(y)\cos\left(\frac{y}{n}\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y\\ &= 1\end{aligned}$$

   (c) Dal cambio di variabile $y = \dfrac{x}{n}$ otteniamo

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)\arctan|x|\mathrm{d}x = n\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\arctan|ny|\mathrm{d}y.$$

   In quest'ultimo integrale si può applicare il teorema di convergenza dominata, perché $f(y)\arctan|ny| \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{\pi}{2}f(y)$ per ogni $y\neq 0$ e $|f(y)\arctan|ny|| \leq \dfrac{\pi}{2}|f(y)| \in L^1(\mathbb{R})$; dunque,

   $$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)\arctan|x|\mathrm{d}x = \left(\lim_{n\to+\infty} n\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\arctan|ny|\mathrm{d}y\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\lim_{n\to+\infty} n\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f(y)\arctan|ny|\mathrm{d}y\right)\\
&= \left(\lim_{n\to+\infty} n\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{2} f(y)\mathrm{d}y\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\lim_{n\to+\infty} n\\
&= +\infty.
\end{aligned}
$$

2. Sia (X,Σ,μ) uno spazio misura con $\mu(X)<+\infty$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni μ-misurabili tali che $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puntualmente e che soddisfino la proprietà

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,M_\varepsilon \text{ tale che } \int_{\{x\in X:\,|f_n(x)|>M_\varepsilon\}} |f_n|\mathrm{d}\mu \le \varepsilon.$$

Dimostrare, utilizzando la successione $g_n^M(x)=\min\{|f_n(x)|,M\}$, che $\int_X |f_n|\mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Ad ogni $M>0$ fissato, $g_n^M \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puntualmente, inoltre per costruzione $0\le g_n^M\le M$, con $\int_X M\mathrm{d}\mu = M\mu(X)<+\infty$, dunque dal teorema di convergenza dominata $\int_X g_n^M\mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Prendiamo ora $\varepsilon, M_\varepsilon$ che verifichino la proprietà precedente e notiamo che $|f_n| = g_n^M + (|f_n|-M)\chi_{\{x\in X:|f_n(x)|\ge M\}}$: dunque, otteniamo

$$
\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to+\infty}\int_X |f_n|\mathrm{d}\mu\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_X g_n^M\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to+\infty}\int_{\{x\in X:|f_n(x)|\ge M\}} (|f_n|-M)\mathrm{d}\mu\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_{\{x\in X:|f_n(x)|\ge M\}} (|f_n|-M)\mathrm{d}\mu\\
&\le \lim_{n\to+\infty}\int_{\{x\in X:|f_n(x)|\ge M\}} |f_n|\mathrm{d}\mu\\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Essendo ε arbitrario, concludiamo che il limite è 0.

3. Sia $r>0$ fissato, μ una misura Boreliana su $\mathbb{R}$ e finita sui compatti e sia $f(x):=\mu((x-r,x+r))$. Dimostrare che f è inferiormente semi-continua, ovvero che per ogni successione convergente $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ si ha $f(x)\le \liminf_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Dimostrare, utilizzando la misura di Dirac $\mu(A)=\begin{cases}1 & \text{se } 0\in A\\ 0 & \text{se } 0\notin A\end{cases}$, che la disuguaglianza precedente potrebbe essere stretta.

Data una successione $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$, definiamo $g_n(x):=\chi_{(x_n-r,x_n+r)}$. Il suo limite puntuale, e in particolare il limite inferiore, è $g(x)=\chi_{(x-r,x+r)}$, dunque dal Lemma di Fatou otteniamo

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\chi_{(x-r,x+r)}\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}}\liminf_{n\to+\infty} g_n\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to+\infty}\mu((x_n-r,x_n+r)) = \liminf_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Prendendo $\mu(A)=\begin{cases}1 & \text{se } 0\in A\\ 0 & \text{se } 0\notin A\end{cases}$ e $x_n = r-\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\nearrow} r$, si ottiene $f(x_n)=\mu\left(\left(-\frac{1}{n},2r-\frac{1}{n}\right)\right) = r$ ma $f(1)=\mu((0,2r))=0$.

4. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e $f : X \to [0, +\infty]$ una funzione $L^1(\mu)$. Dimostrare che:

   (a) L'insieme $A := \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ ha misura nulla $\mu(A) = 0$.

   (b) L'insieme $B := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ è σ-finito, cioè è unione numerabile $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ di insiemi misurabili di misura finita $\mu(B_n) < +\infty$.

   (c) Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme misurabile $C_\varepsilon \in \Sigma$ con misura finita $\mu(C_\varepsilon) < +\infty$ e $\int_{X \setminus C_\varepsilon} f \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon$.

   (a) Supponiamo per assurdo che $\mu(A) = \delta_0 > 0$; allora

$$\int_X f \mathrm{d}\mu \geq \int_A f \mathrm{d}\mu = \delta_0 \cdot +\infty = +\infty,$$

   contraddicendo il fatto che $f \in L^1(\mu)$.

   (b) Possiamo scrivere $B = A \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ con $B_n = \left\{x \in X : \frac{1}{n} < f(x) < n\right\}$: si tratta di insiemi misurabili, in quanto preimmagini di insiemi aperti (chiuso nel caso di A) e inoltre hanno misura finita: questo è stato appena visto per A, ed è vero anche per ciascun B_n, perchè se qualche B_{n_0} avesse misura infinita, allora

$$\int_X f \mathrm{d}\mu \geq \int_{B_{n_0}} f \mathrm{d}\mu \geq \int_{B_{n_0}} \frac{1}{n_0} \mathrm{d}\mu = \frac{\mu(B_{n_0})}{n_0} = +\infty.$$

   (c) Consideriamo la successione di funzioni $f_n = f\chi_{B_n}$, con B_n come sopra: la successione converge in modo monotono crescente a $f\chi_{B \setminus A}$, con f nulla all'infuori di $B \setminus A$ e A di misura nulla, dunque

$$\int_{B_n} f \mathrm{d}\mu = \int_X f_n \mathrm{d}\mu \underset{n \to +\infty}{\nearrow} \int_X f\chi_{B \setminus A} \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu - \int_{X \setminus B} f \mathrm{d}\mu - \int_A f \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

   Di conseguenza, fissato $\varepsilon > 0$, basterà prendere $C_\varepsilon = B_{n_\varepsilon}$, con n_ε sufficientemente grande affinché $\int_{X \setminus B_{n_\varepsilon}} f \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu - \int_{B_n} f \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon$.