Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 3 del 31 Ottobre 2018
Argomento: Misure, passaggio al limite sotto integrale, completezza

1. Utilizzando opportune serie di funzioni, dimostrare le uguaglianze

$$\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1-x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \qquad\qquad \int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1+x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.$$

2. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura.

   (a) Se μ è completa e f è misurabile rispetto a Σ, allora ogni $g : X \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$ è anch'essa misurabile.

   (b) Se μ non è completa e f è misurabile rispetto a Σ, allora esiste $g : X \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$ ma g non è misurabile.

3. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura, $f : X \to \mathbb{R}$ μ-misurabile e

$$A_n := \{x \in X : n \leq |f(x)| < n+1\}.$$

   Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (a) f è essenzialmente limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per μ-q.o. $x \in X$;

   (b) $\mu(A_n) > 0$ solo per finiti n;

   (c) Se $g \in L^1(\mu)$ allora anche $fg \in L^1(\mu)$.

   Dimostrare che, assumendo inoltre $\mu(X) < +\infty$, $f \in L^1(\mu)$ se e solo se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n) < +\infty$.