Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

ESERCITAZIONE 4 DEL 22 NOVEMBRE 2018
ARGOMENTO: SPAZI ℓ_p

1. Siano ℓ_p definiti da:

$$\begin{aligned} \ell_p &:= \left\{ \{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} : \|a\|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |a(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\} \\ \ell_\infty &:= \left\{ \{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} : \|a\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a(k)| < +\infty \right\} \end{aligned}$$

   Dimostrare che:

   (a) Se $1 \le p \le q \le +\infty$ allora $\|x\|_q \le \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell_p$, e in particolare $\ell_p \subset \ell_q$.

   (b) Lo spazio $(\ell_p, \|\cdot\|_q)$ NON è completo per nessun $p < q$.
   (Suggerimento: considerare la successione $a_n(k) := \begin{cases} a(k) & k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$ per un qualche $a \in \ell_q \setminus \ell_p$, ad esempio $a(k) = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{p}}}$.)

   (c) ℓ_p è separabile per ogni $p < +\infty$.
   (Suggerimento: considerare il sottospazio di $X \subset \ell_p$ dato da

$$X := \{a \in \ell_p : a(k) \in \mathbb{Q} \, \forall \, k \in \mathbb{N}, \, a(k) = 0 \text{ definitivamente}\}.)$$

   (d) Dimostrare che lo spazio delle successioni infinitesime $c_0 \subset \ell_1$ definito da

$$c_0 := \left\{ \{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} : a(k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0 \right\}$$

   è separabile mentre ℓ_∞ NON lo è.
   (Suggerimento: mostrare che non è separabile il sottoinsieme $Y \subset \ell_\infty$ definito da

$$Y := \{a \in \ell_\infty : a(k) \in \{0, 1\} \, \forall \, k \in \mathbb{N}\}.)$$

2. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da $a_n(k) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \ne k \end{cases}$. Dimostrare che:

   (a) $\|a_n\|_p = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$;

   (b) a_n non ha estratte convergenti per nessun $p \in [1, +\infty]$.

3. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da $a_n(k) = \dfrac{\left(\cos \frac{1}{n}\right)^k}{n}$.

   (a) Calcolare $\|a_n\|_p$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ e dedurne che $a_n \in \ell_p$ per ogni $p \ge 1$;

   (b) Dimostrare che a_n è limitata in ℓ_p se e solo se $p \ge 2$;

   (c) Dimostrare che a_n converge se e solo se $p > 2$ e trovarne il suo limite.