Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 6 del 20 Dicembre 2018
Argomento: Misure prodotto, operatori lineari, spazi duali

1. Sia $a(j,k):\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\sum_{j,k}|a(j,k)|<+\infty$.

   (a) Dimostrare che $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}a(j,k)\right)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}a(j,k)\right)$.

   (b) Sia ora $b(j,k):=\begin{cases}1 & k=j\\ -1 & k=j+1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$. Dimostrare che $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}b(j,k)\right)\neq\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}b(j,k)\right)$ e spiegare perché ciò non è in contraddizione con il punto precedente.

2. Sia (X,Σ,μ) uno spazio misura, $f:X\to[0,+\infty]$ μ-misurabile e $A:=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}:0\le y\le f(x)\}$. Dimostrare che A è misurabile rispetto alla misura prodotto tra μ e la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e la sua misura è data da
$$(m\times\mu)(A)=\int_X f\mathrm{d}\mu.$$

3. Sia (X,Σ,μ) uno spazio misura finito, $f:X\to[0,+\infty)$ Σ-misurabile con $\displaystyle\int_X f\mathrm{d}\mu=+\infty$ e $\lambda=f\mu$.

   (a) Dimostrare che λ è assolutamente continua rispetto a μ.

   (b) Dimostrare che esiste una successione di insiemi Σ-misurabili disgiunti $A_n\in\Sigma$ tali che $\mu(A_n)\underset{n\to+\infty}{\to}0$ e $\lambda(A_n)\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$. Confrontare con quanto visto a lezione. (Suggerimento: utilizzare la famiglia di insiemi $B_{l,m}:=\{x\in X: l<f(x)\le m\}$)

4. Sia (X,Σ,μ) lo spazio misura definito da: $X=\{0,1\}$, $\Sigma=\mathcal{P}(X)$, $\mu(\{0\})=1$, $\mu(\{1\})=+\infty$.

   (a) Descrivere gli spazi $L^p(X,\Sigma,\mu)$ al variare di $p\in[1,+\infty]$.

   (b) Stabilire per quali $p\in[1,+\infty)$ vale l'isomorfismo canonico tra $(L^p(X,\Sigma,\mu))^*$ e $L^{\frac{p}{p-1}}(X,\Sigma,\mu)$ e confrontare con quanto visto a lezione.

5. Sia $L_n:C([-1,1])\to\mathbb{R}$ il funzionale lineare dato da
$$L_nf:=\int_0^1 ne^{-nx}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^0\frac{f(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x.$$

   (a) Calcolare la norma operatoriale $\|L_n\|$ e dedurre che $\{L_nf\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata per ogni $f\in C([-1,1])$.

   (b) Trovare una misura con segno di Borel regolare μ tale che $L_nf\underset{n\to+\infty}{\to}\displaystyle\int_{-1}^1 f\mathrm{d}\mu$ per ogni $f\in C([-1,1])$.

6. Sia $Lf=\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ per $x\in[0,1]$.

   (a) Dimostrare che se $f\in L^p([0,1])$ allora $Lf\in L^p([0,1])$ per ogni $p\in[1,+\infty]$.

   (b) Calcolare la norma dell'operatore $L:L^\infty([0,1])\to L^\infty([0,1])$.

   (c) Calcolare la norma dell'operatore $L:L^1([0,1])\to L^1([0,1])$.