Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 6 del 20 Dicembre 2018
Argomento: Misure prodotto, operatori lineari, spazi duali

1. Sia $a(j,k):\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\sum_{j,k}|a(j,k)|<+\infty$.

   (a) Dimostrare che $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}a(j,k)\right)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}a(j,k)\right)$.

   (b) Sia ora $b(j,k):=\begin{cases}1 & k=j\\ -1 & k=j+1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$. Dimostrare che $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}b(j,k)\right)\neq\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}b(j,k)\right)$ e spiegare perché ciò non è in contraddizione con il punto precedente.

(a) Le due sommatorie coincidono per il teorema di Fubini, applicato con $(X_1,\Sigma_1,\mu_1)=(X_2,\Sigma_2,\mu_2)=(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ dove μ è la misura del conteggio; il teorema può essere applicato in quanto $\displaystyle\int_{X_1\times X_2}|a(j,k)|\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2)=\sum_{j,k}|a(j,k)|$ è finito per ipotesi. Dunque otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}a(j,k)\right) &= \int_{\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{N}}a(j,k)\mathrm{d}\mu_2(k)\right)\mathrm{d}\mu_1(j)\\ &= \int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}a(j,k)\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2)(j,k)\\ &= \int_{\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{N}}a()j,k)\mathrm{d}\mu_1(j)\right)\mathrm{d}\mu_2(k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}a(j,k)\right).\end{aligned}$$

(b) Si vede facilmente che $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}b(j,k)=0$ per ogni $j\in\mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}}b(j,k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\geq 1\end{cases}$, dunque

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}b(j,k)\right)=0\neq 1=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}b(j,k)\right).$$

Non vale il risultato precedente perché non è soddisfatta la condizione $\displaystyle\sum_{j,k}|b(j,k)|<+\infty$, in quanto

$$\sum_{j,k}|b(j,k)|=\sum_{k=j}1+\sum_{k=j+1}1=+\infty.$$

2. Sia (X,Σ,μ) uno spazio misura, $f : X \to [0,+\infty]$ μ-misurabile e $A := \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \le y \le f(x)\}$. Dimostrare che A è misurabile rispetto alla misura prodotto tra μ e la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e la sua misura è data da

$$m(A) = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Scrivendo $A = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : y \ge 0\} \cap \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : y - f(x) \le 0\}$ otteniamo che è misurabile rispetto alla misura prodotto in quanto intersezione di due misurabili: il primo lo è in quanto prodotto di due misurabili, il secondo perché preimmagine del chiuso $[-\infty, 0]$ rispetto alla funzione misurabile $(x,y) \mapsto y - f(x)$. Per calcolarne la misura applichiamo il teorema di Tonelli alla funzione positiva e misurabile $g(x,y) = \chi_A(x,y)$:

$$\begin{aligned} (m \times \mu)(A) &= \int_{X\times[0,+\infty]} g(x,y)\mathrm{d}(\mu(x),y) \\ &= \int_X \left(\int_0^{+\infty} g(x,y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X \left(\int_0^{+\infty} \chi_{[0,f(x)]}(y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

3. Sia (X,Σ,μ) uno spazio misura finito, $f : X \to [0,+\infty)$ Σ-misurabile con $\displaystyle\int_X f\mathrm{d}\mu = +\infty$ e $\lambda = f\mu$.

   (a) Dimostrare che λ è assolutamente continua rispetto a μ.

   (b) Dimostrare che esiste una successione di insiemi Σ-misurabili disgiunti $A_n \in \Sigma$ tali che $\mu(A_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ e $\lambda(A_n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Confrontare con quanto visto a lezione.
   (Suggerimento: utilizzare la famiglia di insiemi $B_{l,m} := \{x \in X : l < f(x) \le m\}$)

   (a) L'assoluta continuità segue dal fatto elementare che se $\mu(A) = 0$ allora $\lambda(A) = \displaystyle\int_A f\mathrm{d}\mu = 0$.

   (b) Notiamo innanzi tutto che, fissato m, la famiglia $B_{l,m}$ è una famiglia crescente di insiemi misurabili con $\displaystyle\bigcup_{m=l+1}^{+\infty} B_{l,m} = \{x \in X : f(x) > l\} := C_l$, che verifica $\lambda(C_l) = \lambda(X) - \displaystyle\int_{\{f\le l\}} f\mathrm{d}\mu \ge \lambda(X) - l\mu(X) = +\infty$. Dunque, per ogni l $\lambda(B_{l,m}) \underset{m\to+\infty}{\to} +\infty$ e quindi esisterà un certo m_1 tale che $\lambda(B_{0,m_1}) \ge 1$; analogamente, poiché $\lambda(B_{m_1,m}) \underset{m\to+\infty}{\to} +\infty$, esisterà $m_2 > m_1$ tale che $\lambda(B_{m_1,m_n}) \ge 2$. Ripetendo la procedura troveremo una successioni di misurabili disgiunti $A_n := B_{m_{n-1},m_n}$ tale che $\lambda(A_n) \ge n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, e inoltre $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \mu(X) < +\infty$, dunque $\mu(A_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   Questo non contraddice la caratterizzazione dell'assoluta continuità vista a lezione perché quest'ultima vale solo per misure con variazione totale finita, condizione non verificata in questo caso dal momento che $\lambda(X) = +\infty$.

4. Sia (X,Σ,μ) lo spazio misura definito da: $X = \{0,1\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(X)$, $\mu(\{0\}) = 1$, $\mu(\{1\}) = +\infty$.

   (a) Descrivere gli spazi $L^p(X,\Sigma,\mu)$ al variare di $p \in [1,+\infty]$.

(b) Stabilire per quali $p \in [1,+\infty]$ vale l'isomorfismo canonico tra $(L^p(X,\Sigma,\mu))^*$ e $L^{\frac{p}{p-1}}(X,\Sigma,\mu)$ e confrontare con quanto visto a lezione.

(a) Innanzi tutto, osserviamo che se $f(1) \neq 0$ allora $\displaystyle\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu = +\infty$, se invece $f(1) = 0$ abbiamo $\displaystyle\int_X |f|^p = |f(0)|^p$, dunque per ogni $p \neq \infty$ ho

$$L^p(X,\Sigma,\mu) = \{f : \{0,1\} \to \mathbb{R}; f(1) = 0\}$$

Quanto a $L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ invece, essendo X finito, per ogni scelta di $f(0), f(1)$ avrò una funzione essenzialmente limitate e dunque

$$L^\infty(X,\Sigma,\mu) = \{f : \{0,1\} \to \mathbb{R}\}.$$

(b) Per ogni $p \in [1,+\infty)$ ogni funzione in $L^p(X,\Sigma,\mu)$ è determinata dal valore di $f(0)$, dunque ogni funzionale lineare continuo $L : L^p(X,\Sigma,\mu) \to \mathbb{R}$ sarà del tipo $L(f) = cf(0)$ per qualche $c \in \mathbb{R}$, e inoltre $L(f) = cf(0) = \displaystyle\int_X f g_c \mathrm{d}\mu$ per g_c definita da $g_c(0) = c$ e $g_c(1) = 0$. Per $p > 1$ otteniamo, al variare di c, tutto lo spazio $L^{\frac{p}{p-1}}(X,\Sigma,\mu)$, e dunque abbiamo l'isomorfismo canonico tra $(L^p(X,\Sigma,\mu))^*$ e $L^{\frac{p}{p-1}}(X,\Sigma,\mu)$. Se invece $p = 1$ non otteniamo tutto lo spazio $L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ perché ad esempio nessun elemento è rappresentato dalla g data da $g(0) = 0, g(1) = 1$.
Questo non contraddice i risultati visti a lezione sui duali degli spazi L^p, che valgono per spazi misura σ-finiti, quale non è X.

5. Sia $L_n : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare dato da

$$L_n f := \int_0^1 n e^{-nx} f(x) \mathrm{d}x - \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+n^2x^2} \mathrm{d}x.$$

(a) Calcolare la norma operatoriale $\|L_n\|$ e dedurre che $\{L_n f\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata per ogni $f \in C([-1,1])$.

(b) Trovare una misura con segno di Borel regolare μ tale che $L_n f \underset{n\to+\infty}{\to} \displaystyle\int_{-1}^1 f \mathrm{d}\mu$ per ogni $f \in C([-1,1])$.

(a) Poiché il funzionale è rappresentato dalla misura con segno $\mu_n = \left(n e^{-nx}\chi_{[0,1]} - \dfrac{1}{1+n^2x^2}\chi_{[-1,0]}\right) m$, dal Teorema di Riesz la sua norma operatoriale sarà data dalla variazione totale della misura, che è

$$\begin{aligned}
|\mu_n|([-1,1]) &= \left(n e^{-nx}\chi_{[0,1]} + \frac{1}{1+n^2x^2}\chi_{[-1,0]}\right) m([-1,1]) \\
&= \int_0^1 n e^{-nx} \mathrm{d}x + \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+n^2x^2} \\
&= \left[-e^{-nx}\right]_0^1 + \left[\frac{\arctan(nx)}{n}\right]_{-1}^0 \\
&= 1 - e^{-n} + \frac{\arctan(n)}{n}.
\end{aligned}$$

Essendo quest'ultima quantità limitata in n, allora per ogni $f \in C([-1,1])$ deduciamo $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |L_n f| \leq \|f\|_\infty \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\| < +\infty$.

(b) Per poter passare al limite per $n \to +\infty$, applichiamo il cambio di variabile $y = nx$ al primo integrale e scriviamo

$$L_n f := \int_0^n e^{-y} f\left(\frac{y}{n}\right) \mathrm{d}y - \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+n^2x^2} f(x)\mathrm{d}y.$$

A questo punto, poiché $\left| e^{-y} f\left(\frac{y}{n}\right) \chi_{[0,n]} \right| \leq e^{-y} \|f\|_\infty$ per $y \in [0, +\infty]$ e $\left| \frac{f(x)}{1+n^2x^2} \right| \leq \|f\|_\infty$ per $x \in [-1, 0]$, possiamo applicare a entrambi gli integrali il teorema di convergenza dominata e sfruttare la continuità di f:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} L_n f &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-y} f\left(\frac{y}{n}\right) \chi_{[0,n]} \mathrm{d}x - \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+n^2x^2} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} e^{-y} f\left(\frac{y}{n}\right) \chi_{[0,n]} \mathrm{d}y - \int_{-1}^0 \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x)}{1+n^2x^2} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-y} \mathrm{d}y f(0) \\ &= \int_{-1}^1 f \mathrm{d}(\delta_0). \end{aligned}$$

Dunque abbiamo dimostrato che $L_n f \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{-1}^1 f \mathrm{d}\mu$ con $\mu = \delta_0$, dove δ_0 è la misura di Dirac definita da $\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$

6. Sia $Lf = \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$ per $x \in [0, 1]$.

(a) Dimostrare che se $f \in L^p([0, 1])$ allora $Lf \in L^p([0, 1])$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

(b) Calcolare la norma dell'operatore $L : L^\infty([0, 1]) \to L^\infty([0, 1])$.

(c) Calcolare la norma dell'operatore $L : L^1([0, 1]) \to L^1([0, 1])$.

(a) Se $f \in L^p([0, 1])$ per $p \in [1, +\infty)$, allora applicando la disuguaglianza di Hölder otteniamo:

$$\begin{aligned} \|Lf\|_p^p &= \int_0^1 \left| \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t \right|^p \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |x-t|^p |f(t)|^p \mathrm{d}t \right) \left(\int_0^x 1^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}t \right)^{p-1} \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|^p \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}t \\ &\leq \|f\|_p^p; \end{aligned}$$

Per $p = +\infty$ invece abbiamo

$$\begin{aligned} \|Lf\|_\infty &= \operatorname{esssup}_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \operatorname{esssup}_{x\in[0,1]} \int_0^x (x-t)|f(t)|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1-t)|f(t)|\mathrm{d}t \\ &\leq \left(\int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t \right) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

.

(b) Dal punto precedente deduciamo che $\|L\| \leq \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Per far vedere che vale l'uguaglianza cerchiamo una f per cui le disuguaglianze che hanno portato a questa stima sono in realtà delle uguaglianze: la prima vale per tutte le funzioni di segno costante, mentre la seconda per le funzioni costanti in modulo; dunque se prendiamo $f \equiv 1$ abbiamo $\|f\|_\infty = 1$ e

$$\|Lf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x (x-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

(c) Applicando il teorema di Fubini otteniamo

$$\begin{aligned}
\|Lf\|_1 &= \int_0^1 \left| \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^x (x-t)|f(t)|\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \left(\int_t^1 (x-t)\mathrm{d}x \right) \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} |f(t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2}\|f\|_1,
\end{aligned}$$

da cui $\|L\| \leq \frac{1}{2}$. Come nel punto precedente, cerchiamo funzioni per cui valga l'uguaglianza nelle stime precedenti: anche stavolta la prima disuguaglianza vale per funzioni di segno costante; la seconda invece potrà valere asintoticamente per funzioni che si concentrano intorno al punto di massimo di $g(t) = \frac{(1-t)^2}{2}$, ad esempio $f_n(t) = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$. Abbiamo $\|f\|_1 = 1$ e

$$Lf_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f_n(t)\mathrm{d}t = n\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{(1-t)^2}{2}\mathrm{d}t = n\left[-\frac{(1-t)^3}{6} \right]_0^{\frac{1}{n}} = n\frac{\frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{6} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$$