**Università degli Studi Roma Tre - Ingegneria delle Tecnologie per il Mare**

# Esercizi di Analisi Matematica I

**A.A. 2019-2020 - Docente: Luca Battaglia**

Soluzioni degli esercizi 11 del 7-8 Gennaio 2020
Argomento: Integrali impropri

Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x} \mathrm{d}x$;

   L'integranda è limitata, dunque la convergenza dell'integrale dipenderà solo dal comportamento all'infinito. Poiché, per $t \to 0$, vale $e^t - 1 = t + O\left(t^2\right)$, allora ponendo $t = \frac{1}{x}$ avremo

   $$\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),$$

   dunque l'integranda ha lo stesso andamento asintotico di $\frac{1}{x^2}$, e pertanto converge.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{\sin\left(x^4\right)}}{x^2} \mathrm{d}x$;

   Bisogna studiare il comportamento dell'integranda all'infinito e in $x = 0$, dove la funzione è illimitata. All'infinito l'integranda è più piccola di $\frac{1}{x^2}$ e dunque converge. In 0 invece dal limite notevole $\frac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{\to} 1$ otteniamo che il comportamento è quello di $\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$, pertanto l'integrale converge anche in $x = 0$ e dunque è convergente.

Verificare la convergenza e calcolare il valore dei seguenti integrali impropri:

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^2(x+2)} \mathrm{d}x$;

   L'integrale è convergente perché l'integranda è limitata e all'infinito all'andamento di $\frac{1}{x^2}$. Per calcolarlo, cerchiamo $A, B, C$ per cui

   $$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}.$$

   Scrivendo

   $$\frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{(B+C)x^2 + (A+3B+2C)x + 2A + 2B + C}{(x+1)^2(x+2)},$$

   avremo $A = -1, B = 2, C = -2$ e dunque

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[ 2\log(x+1) + \frac{1}{x+1} - 2\log(x+2) \right]_0^{+\infty} \\
&= -1 + \left[ 2\log\frac{(x+1)}{(x+2)} \right]_0^{+\infty} \\
&= 2\log 2 - 1.
\end{aligned}
$$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\log\big(x^2+1\big) - 2\log x\big)\,\mathrm{d}x.$

   L'integrale è convergente perché l'unica singolarità, in $x = 0$, è di tipo logaritmico, e all'infinito l'andamento è lo stesso di $\dfrac{1}{x^2}$ poiché

$$
\int_0^{+\infty} \big(\log\big(x^2+1\big) - 2\log x\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x
$$

   .

   Per calcolare l'integrale procediamo per parti:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \big(\log\big(x^2+1\big) - 2\log x\big)\,\mathrm{d}x &= \big[x\big(\log\big(x^2+1\big) - 2\log x\big)\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[x\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= [2\arctan x]_0^{+\infty} \\
&= \pi
\end{aligned}
$$