Università degli Studi Roma Tre - Ingegneria delle Tecnologie per il Mare

Esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2019-2020 - Docente: Luca Battaglia

Soluzioni degli esercizi 2 del 15-16 Ottobre 2019
Argomento: Disequazioni, insiemi di definizione

Determinare l'insieme di definizione e il segno delle seguenti funzioni:

1. $f(x)=\ln\frac{2+\sin x}{2\sin^2 x-1}$;
Innanzi tutto, data la periodicità del seno, sarà sufficiente studiare f per $0\le x<2\pi$. Affinché f sia definita è necessario che il denominatore della frazione sia diverso da zero, e che l'argomento del logaritmo sia positivo. Il denominatore è diverso da zero per $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè $x\neq\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$; poiché il numeratore è sempre positivo e dunque la funzione è definita se e solo se il numeratore è positivo: scrivendo $2\sin^2 x-1=2\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ciò equivale a $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ oppure $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ovvero $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$.
Per quanto riguarda il segno, f sarà non-negativa se e solo se l'argomento del logaritmo è maggiore o uguale a 1, cioè quando è verificata
$$\frac{2+\sin x}{2\sin^2 x-1}\ge 1.$$
Portando a sinistra il membro di destra e scrivendo come un'unica frazione, si ottiene
$$\frac{3+\sin x-2\sin^2 x}{2\sin^2 x-1}\ge 0.$$
Ricordando che il denominatore è sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, basterà studiare il segno del numeratore: fattorizzando $3+\sin x-2\sin^2 x=(1+\sin x)(3-2\sin x)$ e ricordando che $-1\le\sin x\le 1$, quest'ultima quantità si annullerà per $\sin x=-1$, cioè $x=\frac{3}{2}\pi$, e sarà positiva per ogni altro valore di x. In conclusione, $f(x)=0$ per $x=\frac{3}{2}\pi$ e $f(x)>0$ per $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi,\pi<x<\frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$.

2. $f(x)=|e^x-2|-1$;
La funzione è definita per tutti i valori di x reale.
Per studiarne il segno, notiamo che l'argomento del modulo è non-negativo se e solo se $x\ge\ln 2$, dunque possiamo scrivere la funzione come
$$f(x)=\begin{cases} e^x-3 & \text{se } x\ge\ln 2\\ 1-e^x & \text{se } x<\ln 2\end{cases}.$$
Nel primo intervallo di definizione di f avremo $f(x)\ge 0$ per $x\ge\ln 3$, mentre nell'altro intervallo $f(x)\ge 0$ per $x\le 0$. Dunque, avremo $f(x)>0$ per $x>\ln 3, x<0$, $f(x)=0$ per $x=0,\ln 3$ e $f(x)<0$ per $0<x<\ln 3$.

3. $f(x) = \tan(2x) - \tan^3(2x)$;
Innanzi tutto, poiché la tangente ha periodo π, $f(x)$ avrà periodo $\dfrac{\pi}{2}$ e dunque sarà sufficiente studiarla per $0 \leq x < \pi$. La funzione è definita fintanto che l'argomento della tangente è diverso da $\dfrac{\pi}{2}$, cioè $x \neq \dfrac{\pi}{4}$.
Per quanto riguarda il segno, ponendo $y = \tan(2x)$ potremo scrivere la funzione come

$$y - y^3 = y\left(1 - y^2\right) = y(1-y)(1+y).$$

Studiando il segno dei vari fattori, otteniamo

	$y < -1$	$-1 < y < 0$	$0 < y < 1$	$y > 1$
y	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-y$	$+$	$+$	$+$	$-$
$1+y$	$-$	$+$	$+$	$+$
$y(1+y)(1-y)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Dunque, la funzione sarà positiva per $\tan(2x) < -1$ e $0 < \tan(2x) < 1$, cioè $\dfrac{\pi}{4} < x\dfrac{3}{8}\pi$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{8}$; analogamente, $f(x) = 0$ per $x = 0, \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3}{8}\pi$ e $f(x) < 0$ per $\dfrac{\pi}{8} < x < \dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{3}{8}\pi < x < \dfrac{\pi}{2}$.

4. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x}{\sqrt[3]{e^{2x} - 2}}$; La radice cubica non ha problemi di definizione, dunque f sarà definita per x che non annulla il denominatore. Inoltre, poiché la radice cubica è nulla solo quando lo è il suo argomento, $f(x)$ sarà ben definita per $e^{2x} - 2 \neq 0$, cioè $x \neq \dfrac{\ln 2}{2}$.
Per studiare il segno, scriviamo il numeratore della funzione come

$$x^3 + 3x^2 + 4x = x\left(x^2 + 3x + 4\right),$$

con quest'ultimo polinomio di secondo grado privo di radici reali e dunque sempre positivo; pertanto, il numeratore avrà lo stesso segno di x.
Studiando i vari casi, si ottiene

	$x < 0$	$0 < x < \dfrac{\ln 2}{2}$	$x > \dfrac{\ln 2}{2}$
$x^3 + 3x^2 + 4x$	$-$	$-$	$+$
$\sqrt[3]{e^{2x} - 2}$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Dunque, $f(x) > 0$ per $x < 0$ e $x > \dfrac{\ln 2}{2}$, $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $f(x) < 0$ per $0 < x < 1$.

5. $f(x) = \arcsin\left(x^2 - 2\right)$;
La funzione è definita fintanto che l'argomento dell'arcoseno è compreso tra -1 e 1, estremi inclusi, cioè se $-1 \leq x^2 - 2 \leq 1$. Questa condizione equivale a $1 \leq x^2 \leq 3$, cioè $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ oppure $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.
Riguardo il segno, ricordiamo che l'arcoseno ha lo stesso segno del suo argomento, dunque avremo $f(x) \geq 0$ per tutte le x per cui f è definita che verificano $x^2 - 2 \geq 0$, cioé $x \leq -\sqrt{2}$ oppure $x \geq \sqrt{2}$. Pertanto, concludiamo che $f(x) > 0$ per $-\sqrt{3} \leq x < -\sqrt{2}$ e $\sqrt{2} < x \leq \sqrt{3}$, $f(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{2}$ e $f(x) < 0$ per $-\sqrt{2} < x \leq -1$ e $1 \leq x < \sqrt{2}$.

6. $f(x) = \arctan \dfrac{1 - e^x}{x^6 + 7x^3 - 8}$;
Poiché l'arcotangente non ha problemi di definizione, la funzione non è definita solo per le x

che annullano il denominatore. Quest'ultimo diventa, scrivendo $y = x^3$, $y^2 + 7y - 8$, che ha per radici $y = 1$ e $y = -8$. Dunque, il denominatore di $f(x)$ vale 0 quando $x^3 = 1$ oppure $x^3 = -8$, quindi $f(x)$ non è definita in $x = 1$ e $x = -2$.
Per studiare il segno di f, ricordiamo che l'arcotangente ha lo stesso segno del suo argomento e quindi basterà studiare il segno di $g(x) = \dfrac{1 - e^x}{x^6 + 7x^3 - 8}$; scrivendo il denominatore come $x^6 + 7x^3 - 8 = \left(x^3 - 1\right)\left(x^3 + 8\right)$ e studiando il segno dei vari fattori si ottiene:

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$1 - e^x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x^3 - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x^3 + 8$	$-$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

.

Dunque $f(x) > 0$ per $x < -2$ e $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $f(x) < 0$ per $-2 < x < 0$ e $x > 1$.

7. $f(x) = \sqrt{2\cos^2 x - 5\cos x + 2} - \sqrt{2}$;
Per periodicità, restringiamo lo studio della funzione a $0 \leq x < 2\pi$. f sarà definita per le x per cui l'argomento della radice è non-negativo; ponendo $y = \cos x$ otteniamo il polinomio $2y^2 - 5y + 2$, che ha per radici $y = \dfrac{1}{2}$ e $y = 2$. Dunque, $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = (2\cos x - 1)(\cos x - 2)$ e sarà minore o uguale a 0 se $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ oppure $\cos x \geq 2$; essendo però il coseno sempre minore o uguale a 1, è possibile solo la prima condizione che equivale a $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5}{3}\pi$.
Per lo studio del segno, notiamo che poiché $\sqrt{2} \geq 0$ allora la condizione $f(x) \geq 0$ equivarrà a

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 \geq 2,$$

cioè $0 = 2\cos^2 x - 5\cos x = 2\cos x(2\cos x - 5)$. Essendo il secondo fattore sempre negativo, la funzione sarà positiva per gli stessi valori per cui il coseno è negativo, cioè $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi$, e analogamente $f(x) = 0$ per $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$ e $f(x) < 0$ per $x < \dfrac{\pi}{2}, x > \dfrac{3}{2}\pi$.