Università degli Studi Roma Tre - Ingegneria delle Tecnologie per il Mare

Esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2019-2020 - Docente: Luca Battaglia

Soluzioni degli esercizi 6 del 12-13 Novembre 2019
Argomento: Studio di funzione

Studiare graficamente le seguenti funzioni, determinandone:

- Insieme di definizione;
- Eventuali simmetrie;
- Segno ed intersezioni con gli assi;
- Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;
- Eventuali punti di discontinuità e non derivabilità;
- Studio della derivata prima con intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi;
- Studio della derivata seconda con intervalli di concavità/convessità ed eventuali punti di flesso.

1. $f(x) = \arctan\left(1 - e^{-x}\right)$;

Dominio: Nessuna delle funzioni elementari che definiscono f ha problemi di definizione, dunque f è definita
$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

Simmetrie: Poiché l'arcotangente è dispari ma l'esponenziale non è né pari né dispari, concludiamo che
$$f \text{ non è né pari né dispari.}$$

Segno: Poiché l'arcotangente ha lo stesso segno dell'argomento, $f(x)$ sarà positiva se e solo se $1 > e^{-x}$ e cioè
$$f(x) > 0 \iff x > 0 \qquad f(x) = 0 \iff x = 0 \qquad f(x) < 0 \iff x = 0.$$
Dalla stessa analisi del segno di f otteniamo che
$$\text{Il grafico di } f \text{ interseca gli assi nel punto } (0,0).$$

Estremi del dominio: Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$: dati i limiti all'infinito dell'esponenziale e le proprietà dell'arcotangente si ottiene
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}.$$
$$\text{Gli asintoti di } f \text{ sono: } x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{4}.$$

Continuità/derivabilità: Le funzioni che definiscono f non hanno problemi di derivabilità, dunque concludiamo che
$$f(x) \text{ è continua e derivabile } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Studio derivata prima:

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2+1} = \frac{e^x}{2e^{2x}-2e^x+1}.$$

Sia numeratore che denominatore sono sempre positivi, pertanto

$$f \text{ è monotona crescente } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f \text{ non ha punti di massimo né di minimo relativi.}$$

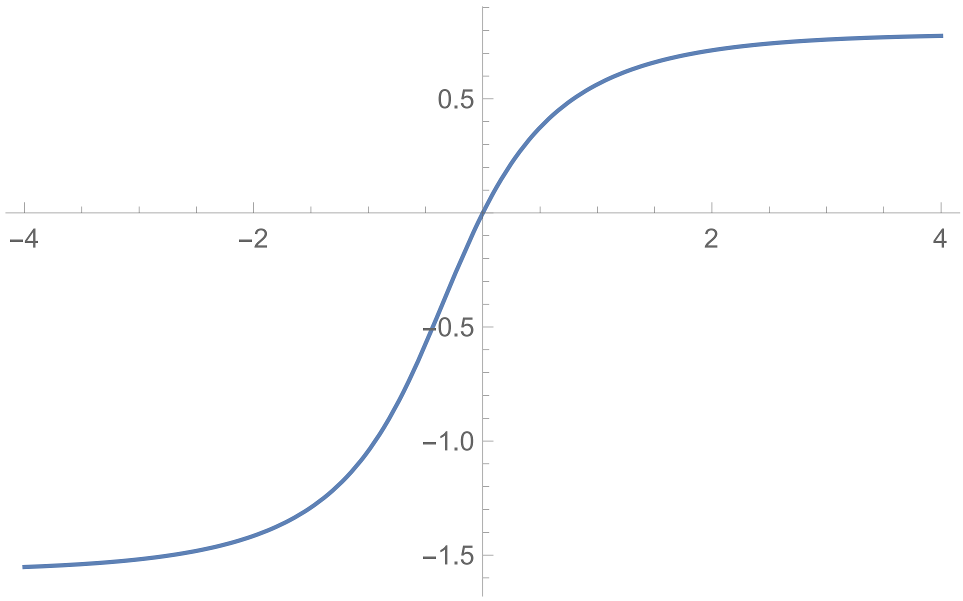
Studio derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{e^x\left(2e^{2x}-2e^x+1\right)-e^x\left(4e^{2x}-2e^x\right)}{\left(2e^{2x}-2e^x+1\right)^2} = \frac{e^x-2e^{3x}}{\left(2e^{2x}-2e^x+1\right)^2}.$$

La derivata seconda ha lo stesso segno di $1-2e^x$, dunque

$$f \text{ è convessa per } x < -\frac{\ln 2}{2} \text{ ed è concava se } x > -\frac{\ln 2}{2}.$$

$$x = -\frac{\ln 2}{2} \text{ è un punto di flesso a tangente obliqua per } f.$$



2. $f(x) = |x| - \dfrac{1}{x}$;

Dominio: f è definita fintanto che il denominatore non si annulla, cioè per

$$x \neq 0.$$

Segno: Scrivendo f come $f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{x} & x > 0 \\ -x - \dfrac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ notiamo che è sempre positiva quando $x < 0$; per $x > 0$ invece sarà positiva se $x > \dfrac{1}{x}$, ovvero $x > 1$, e dunque

$$f(x) > 0 \iff x < 0, x > 1 \qquad f(x) = 0 \iff x = 1 \qquad f(x) < 0 \iff 0 < x < 1.$$

Poiché f non si annulla mai e non è definita in $x = 0$, avremo che

Il grafico di f non interseca né l'asse x né l'asse y.

Simmetrie: Poiché $|x|$ è pari e $-\frac{1}{x}$ è dispari, avremo che

$$f \text{ non è né pari né dispari.}$$

Estremi del dominio: Gli estremi del dominio sono $-\infty, 0, +\infty$ e i rispettivi limiti sono:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^\pm} = \mp\infty.$$

Dunque $x = 0$ è un asintoto orizzontale; inoltre, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\pm 1 - \frac{1}{x^2}\right) = \pm 1$ e $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \mp x) = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{x} = 0$, dunque $y = \pm x$ sono due asintoti obliqui per f:

$$\text{Gli asintoti di } f \text{ sono: } x = 0, y = x, y = -x.$$

Continuità/derivabilità: Tutte le funzioni che definiscono f sono continue sul loro insieme di definizione, ma il modulo non è derivabile in 0; tuttavia, f non è definita in questo punto e dunque non ha problemi di derivabilità:

$$f(x) \text{ è continua e derivabile } \forall x \neq 0.$$

Studio derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} & x > 0 \\ -1 + \frac{1}{x^2} & x < 0 \end{cases}.$$

Studiando il segno, deduciamo che f cresce sempre per x positive, mentre per x negative cresce solo dopo -1:

$$f \text{ è monotona crescente per } -1 < x < 0, x > 0 \text{ ed è monotona decrescente se } x < -1.$$

La derivata prima ha inoltre un unico zero, che verifica:

$$(x, f(x)) = (-1, 2) \text{ è un minimo relativo per } f.$$

Studio derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}.$$

La derivata seconda ha sempre segno opposto a x e non si annulla mai, pertanto:

$$f \text{ è convessa per } x < 0 \text{ ed è concava se } x > 0.$$

$$f \text{ non ha flessi.}$$

3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

Dominio: $f(x)$ è definita se l'argomento del logaritmo è positivo e se il denominatore non si annulla; la prima condizione è verificata per $x > 0$, la seconda per $x \neq 1$, dunque f è definita per

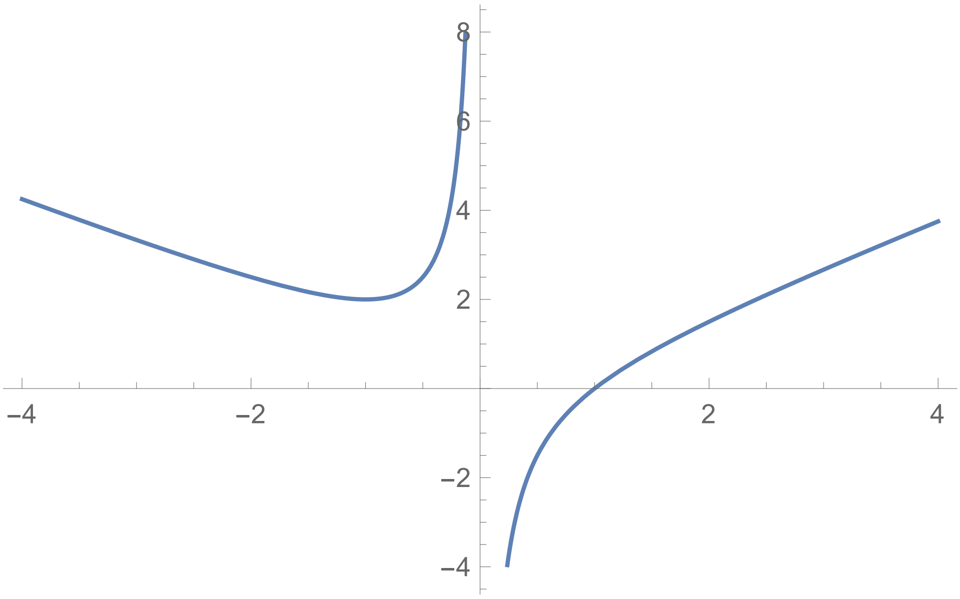
$$0 < x < 1, x > 1.$$

Segno: Poiché il numeratore è sempre positivo nel dominio di f, il segno sarà lo stesso del denominatore, che è positivo per $x < 1$ e negativo per $x > 1$ e dunque

$$f(x) > 0 \iff 0 < x < 1 \qquad f(x) < 0 \iff x > 1.$$

Poiché f non si annulla mai e non è definita in $x = 0$, avremo che

$$\text{Il grafico di } f \text{ non interseca né l'asse } x \text{ né l'asse } y.$$



Simmetrie: Essendo la funzione non definita per $x < 0$, non ha senso chiedersi se sia pari o dispari.

Estremi del dominio: Gli estremi del dominio sono $x = 0, x = 1, x = +\infty$: grazie alle proprietà dei logaritmi si calcolano facilmente i limiti

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to -1^{\pm}} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Da questo segue che $x = 1$ è un asintoto verticale; non esistono invece asintoti orizzontali perché $f(x)$ non ha limite finito per x che va a $+\infty$ e non esistono neanche asintoti obliqui perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ ma $\lim_{x\to+\infty} f(x) - c \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\ln x} - c\right) = +\infty$ per ogni $c \in \mathbb{R}$:

Gli asintoti di f sono: $x = 1$

Continuità/derivabilità: Tutte le funzioni che definiscono f sono continue e derivabili sul loro dominio, dunque varrà lo stesso anche per f:

$$f(x) \text{ è continua e derivabile } \forall x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Studio derivata prima:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

Studiando il segno della derivata deduciamo che $f(x)$ cresce fintanto che $\ln x > 1$:

$$f \text{ è monotona crescente per } 0 < x < 1, 1 < x < e \text{ ed è monotona decrescente se } x > e.$$

Inoltre, l'unico zero di $f'(x)$ è $x = e$, e studiando il segno deduciamo che

$$(x, f(x)) = (e, e) \text{ è un minimo relativo per } f.$$

Studio derivata seconda:

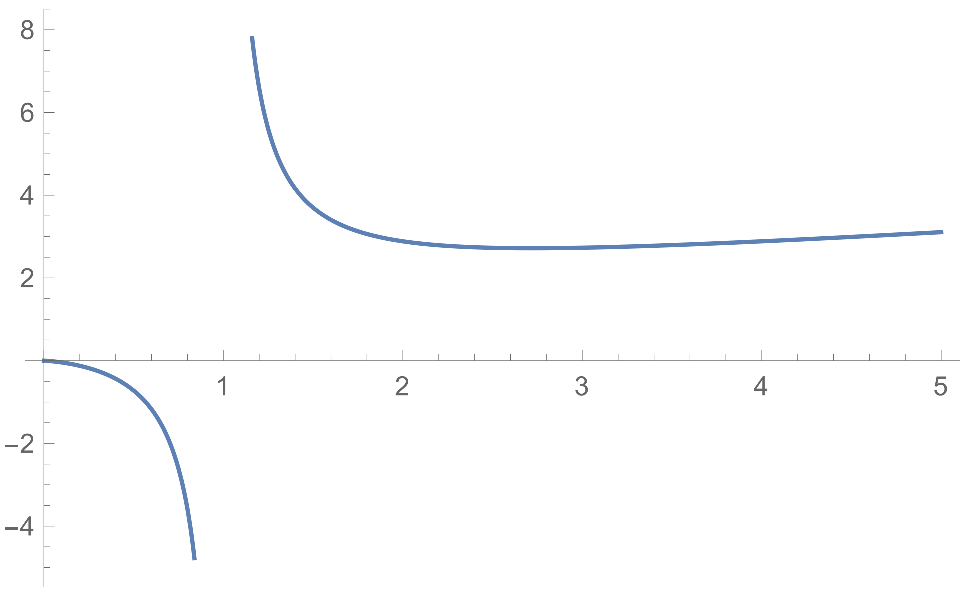
$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)\frac{2\ln x}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

Dallo studio del segno deduciamo che $f''(x) > 0$ se e solo se $0 < \ln x < 2$ e cioè:

$$f \text{ è convessa per } 1 < x < e^2 \text{ ed è concava se } 0 < x < 1, x > e^2.$$

Infine, la derivata seconda ha un zero dato da $x = e^2$, punto in cui f' non si annulla, quindi:

$$x = e^2 \text{ è un punto di flesso a tangente obliqua per } f.$$


8
6
4
2
−2
−4
1
2
3
4
5