Università degli Studi Roma Tre - Ingegneria delle Tecnologie per il Mare

Esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2019-2020 - Docente: Luca Battaglia

Soluzioni degli esercizi 7 del 19-20 Novembre 2019
Argomento: Studio di funzione

Studiare graficamente le seguenti funzioni, determinandone:

- Insieme di definizione;
- Eventuali simmetrie;
- Segno ed intersezioni con gli assi;
- Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;
- Eventuali punti di discontinuità e non derivabilità;
- Studio della derivata prima con intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi;
- Studio della derivata seconda con intervalli di concavità/convessità ed eventuali punti di flesso.

1. $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$;

Dominio: Essendo $2 + \sin x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, il denominatore non è mai nullo e dunque la funzione è sempre definita

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

Simmetrie: Poiché il numeratore è pari ma il denominatore non é né pari né dispari, concludiamo che

$$f \text{ non è né pari né dispari.}$$

Segno: Innanzi tutto, la funzione avrà le stesse periodicità di seno e coseno e quindi avrà periodo 2π; di conseguenza, sarà sufficiente studiarla per $0 \le x < 2\pi$. Per trovare il segno di f notiamo che il denominatore è sempre positivo e dunque $f(x)$ e $\cos x$ avranno lo stesso segno, dato da

$$f(x) > 0 \iff 0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi; \quad f(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi; \quad f(x) < 0 \iff \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi.$$

Da questo studio degli zeri di f e dal calcolo di $f(0) = \frac{1}{2}$ concludiamo che

Il grafico di f interseca l'asse x nei punti $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ e l'asse y nel punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Estremi del dominio: Essendo f definita per ogni x reale, gli estremi del dominio sono $\pm\infty$, ma data la periodicità della funzione avremo

$$\nexists \lim_{x \to \pm\infty} f(x).$$

Da questo segue in particolare che

$$f \text{ non ha asintoti.}$$

Continuità/derivabilità: Nessuna delle funzioni che definisce f ha problemi di continuità o derivabilità, dunque

$$f(x) \text{ è continua e derivabile } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Studio derivata prima:

$$f'(x) = \frac{-\sin x(2+\sin x) - \cos^2 x}{(2+\sin x)^2} = -\frac{1+2\sin x}{(2+\sin x)^2}.$$

La funzione è dunque crescente fintanto che $\sin x < -\frac{1}{2}$, cioè

f è monotona crescente per $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$ ed è monotona decrescente se $0 < x < \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi.$

I due punti in cui la derivata si annulla saranno quindi rispettivamente di minimo e di massimo assoluti per la funzione:

$$(x, f(x)) = \left(\frac{7}{6}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ è un minimo assoluto per } f;$$

$$(x, f(x)) = \left(\frac{11}{6}\pi, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ è un massimo assoluto per } f.$$

Studio derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2\cos x(2+\sin x)^2 + (1+2\sin x)2\cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)^4} = \frac{2\cos x(\sin x - 1)}{(2+\sin x)^3}.$$

Poiché $\sin x - 1 < 0$ e il dominatore è sempre positivo, la concavità sarà determinata dal segno del coseno, ma con il segno opposto, e cioè:

$$f \text{ è convessa per } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \text{ ed è concava se } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi.$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \text{ sono punti di flesso a tangente obliqua per } f.$$

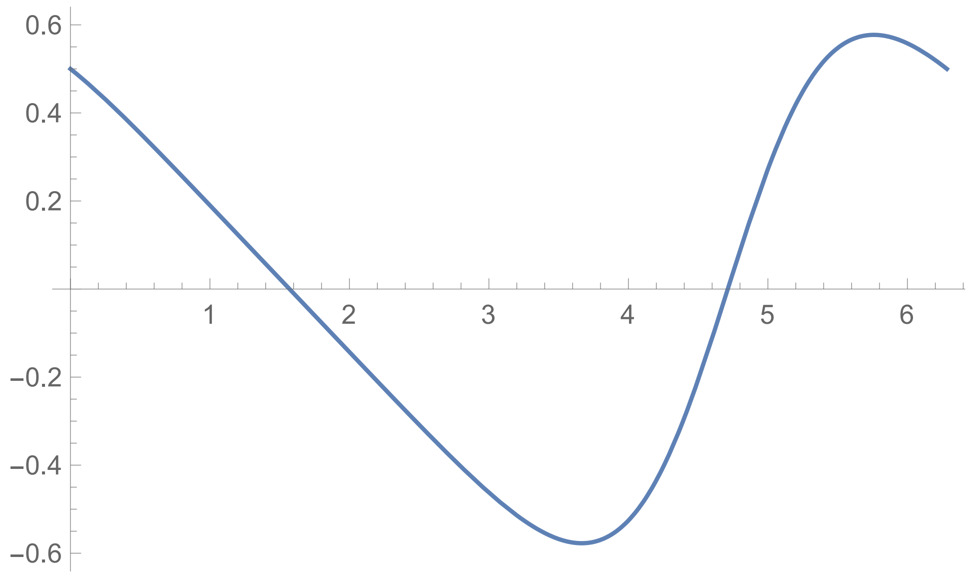

Figura 1: Grafico di $f(x) = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$

2. $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$;

Dominio: La funzione è definita quando l'argomento della radice è maggiore o uguale a zero; questa condizione equivale a $2 \geq x^2$, cioè

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Simmetrie: Poiché il primo fattore è dispari mentre la radice è pari, essendo f il loro prodotto otterremo che

$$f \text{ è dispari.}$$

Segno: Poiché la radice è sempre positiva, ad eccezioni dei valori $x = \pm\sqrt{2}$ in cui $f(x)$ si annulla, ha lo stesso segno di x, ovvero:

$$f(x) > 0 \iff 0 < x < \sqrt{2} \qquad f(x) = 0 \iff x = 0, \pm\sqrt{2} \qquad f(x) < 0 \iff -\sqrt{2} < x < 0.$$

Estremi del dominio: Gli estremi del dominio sono $\pm\sqrt{2}$ e il comportamento di f è dato da:

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{2}} f(x) = 0.$$

Da questo in particolare otteniamo che

$$f \text{ non ha asintoti.}$$

Continuità/derivabilità: f è continua su tutto il dominio perché lo sono le funzioni elementari che la definiscono; analogamente, sarà derivabile all'interno del dominio ma non nei punti di bordo perché $\lim_{x\to\pm\sqrt{2}} \frac{f(x) - f\left(\pm\sqrt{2}\right)}{x \mp \sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} -x\frac{\sqrt{\sqrt{2} \pm x}}{\sqrt{\sqrt{2} \mp x}} = \mp\infty$, e dunque

$$f(x) \text{ è continua } \forall x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \text{ e derivabile per } x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right).$$

Studio derivata prima:

$$f'(x) = \sqrt{2-x^2} + x(2x)\frac{-1}{2\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}.$$

La funzione è crescente se e solo se $x^2 < 1$, cioè

$$f \text{ è monotona crescente per } -1 < x < 1 \text{ ed è monotona decrescente se } -\sqrt{2} < x < -1, 1 < x < \sqrt{2}.$$

Gli zeri della derivata prima $x = \pm 1$ saranno quindi di massimo e di minimo per la funzione, e sono di massimo e minimo assoluti perché f assume sia valori positivi che negativi ma agli estremi del dominio si annulla:

$$(x, f(x)) = (1,1) \text{ è un massimo assoluto per } f, \text{ mentre } (x, f(x)) = (-1,-1) \text{ è un minimo assoluto per } f.$$

Studio derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(-4x)\sqrt{2-x^2} - \left(2-2x^2\right)\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}}{2-x^2} = \frac{2x^3 - 6x}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Poiché $2x^3 - 6x = 2x\left(x^2 - 3\right)$ e $x^2 - 3 < 0$ sul dominio di $f(x)$, allora $f''(x)$ avrà lo stesso segno di x e cioè:

$$f \text{ è convessa per } -\sqrt{2} < x < 0 \text{ ed è concava se } 0 < x < \sqrt{2}.$$

$$x = 0 \text{ è un punto di flesso a tangente obliqua per } f.$$

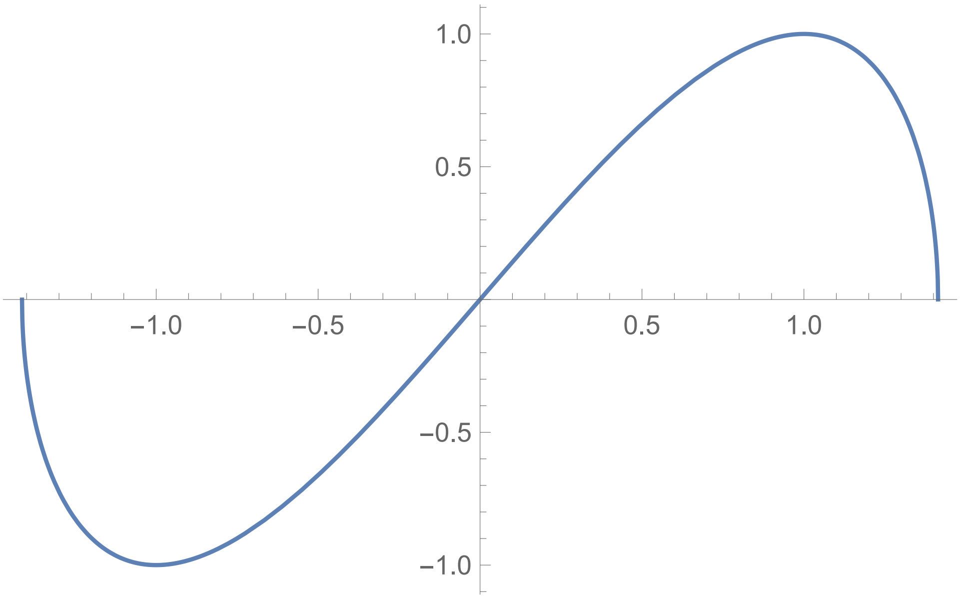

Figura 2: Grafico di $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$

3. $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$;

Dominio: La funzione è definita se il denominatore dell'esponente è diverso da zero, ovvero per

$$x \neq -1.$$

Simmetrie: Poiché né la frazione che si trova a esponente né la funzione esponenziali sono né pari né dispari, avremo che

$$f \text{ non è né pari né dispari.}$$

Segno: Poichè gli esponenziali sono sempre positivi concludiamo che lo è anche f:

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcolando poi $f(0) = 1$ otteniamo che

Il grafico di f non interseca l'asse x ma interseca l'asse y nel punto $(0, 1)$.

Estremi del dominio: Gli estremi del dominio sono $1, \pm\infty$; facendo il limite all'esponente e usando le proprietà dell'esponenziale otteniamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = 0.$$

Da ciò deduciamo l'esistenza di un asintoto verticale e di un asintoto orizzontale:

Gli asintoti di f sono: $x = -1$ (asintoto orizzontale) e $y = e$ (asintoto orizzontale).

Continuità/derivabilità: Le funzioni che definiscono f sono continue e derivabili sul proprio dominio e dunque varrà lo stesso per f:

$$f(x) \text{ è continua e derivabile } \forall x \neq -1.$$

Studio derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}.$$

Poiché vale sempre $f' > 0$, avremo

$$f \text{ è monotona crescente } \forall x \neq -1.$$

$$f \text{ non ha punti di massimo né di minimo relativi.}$$

Studio derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{\frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}(x+1)^2 - 2(x+1)e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^4} = -\frac{2x+1}{(x+1)^4}e^{\frac{x}{x+1}}.$$

La derivata seconda ha lo stesso segno di $2x+1$, quindi

$$f \text{ è convessa per } x < -1, -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ ed è concava se } x > -\frac{1}{2}.$$

Il suo unico zero è $x = -\frac{1}{2}$, che verifica $f'\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$, dunque

$$x = -\frac{1}{2} \text{ è un punto di flesso a tangente obliqua per } f.$$

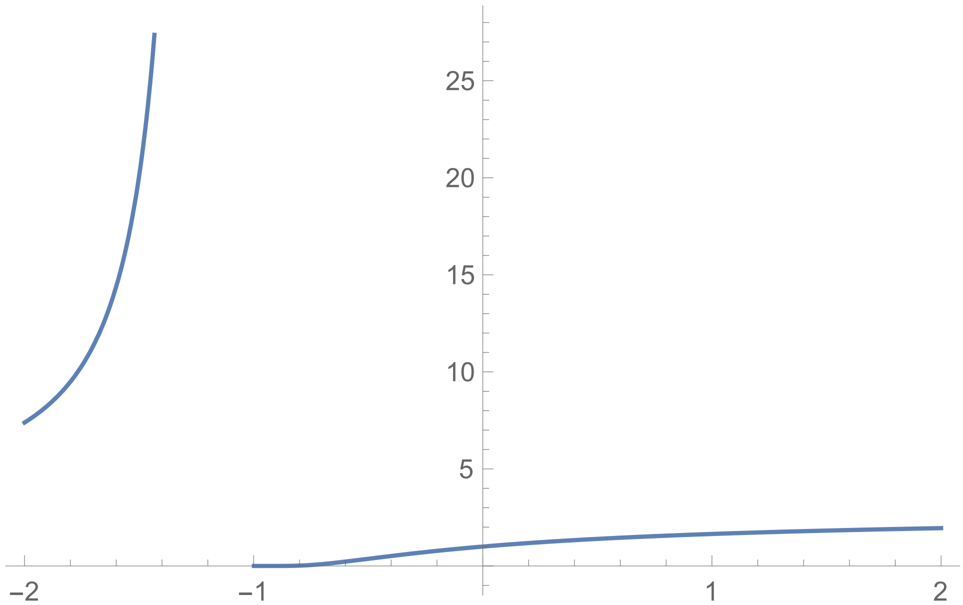

Figura 3: Grafico di $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$