Università degli Studi Roma Tre - Ingegneria delle Tecnologie per il Mare

Esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2019-2020 - Docente: Luca Battaglia

Soluzioni degli esercizi 8 del 3 Dicembre 2019
Argomento: Integrali indefiniti

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sin x}\mathrm{d}x$;

   Con la sostituzione $y=\tan\frac{x}{2}$ si ottiene $\sin x=\frac{2y}{1+y^2}$ e $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+y^2}\mathrm{d}y$, dunque

$$\int \frac{1}{1-\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1-\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}\mathrm{d}y=\int \frac{2}{(y-1)^2}\mathrm{d}y=-\frac{2}{y-1}+c=\frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}}+c.$$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-2x^2}\mathrm{d}x$;

   Scrivendo $x^3-2x^2=x^2(x-2)$, si può scomporre

$$\frac{1}{x^3-2x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}=\frac{(A+C)x^2+(B-2A)x-2B}{x^3-2x^2},$$

   ottenendo $A=-\frac{1}{4},B=-\frac{1}{2},C=\frac{1}{4}$ e dunque

$$\int \frac{1}{x^3-x}\mathrm{d}x=\int\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\log|x|+\frac{1}{2x}+\frac{\log|x-2|}{4}+c.$$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3+x}\mathrm{d}x$;

   Essendo $x^3+1=\left(x^3+x\right)+1-x$, si ottiene

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+x}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{1-x}{x^3+x}\right)\mathrm{d}x.$$

   Scrivendo poi $x^3+x=x\left(x^2+1\right)$, dunque scomponiamo

$$\frac{1-x}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{2Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+(2Bx+C)x}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{(A+2B)x^2+Cx+A}{x^3+x},$$

   da cui $A=1,B=-\frac{1}{2},C=-1$ e quindi

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+x}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=x+\log|x|-\frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right)-\arctan x+c.$$

4. $\displaystyle\int x^3 \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x;$

Con la sostituzione $y = x^2$ e integrando poi per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int x^3 \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int x^2 \cos\left(x^2\right) 2x dx \\
&= \frac{1}{2}\int y \cos y dy \\
&= \frac{1}{2}\left(y \sin y - \int \sin y \mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{2}(y \sin y + \cos y) + c \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 \sin\left(x^2\right) + \cos\left(x^2\right)\right) + c.
\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+4}\mathrm{d}x;$

Con la sostituzione $y = \sqrt{x}$ si ottiene $x = y^2$, da cui $\mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$ e dunque

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+4}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y+4}2y\mathrm{d}y = \int \left(2 - 8\frac{1}{y+4}\right)\mathrm{d}y = 2y - 8\log|y+4| + c = 2\sqrt{x} - 8\log\left(\sqrt{x}+4\right) + c.$$

6. $\displaystyle\int \sqrt{3-\sqrt{x}}\mathrm{d}x;$

Con la sostituzione $y = \sqrt{3-\sqrt{x}}$ si ottiene $x = \left(y^2-3\right)^2 = y^4 - 6y^2 + 9$, dunque $\mathrm{d}x = 4y^3 - 12y\mathrm{d}y$, quindi

$$\int \sqrt{3-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int y\left(4y^4 - 12y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{4}{5}y^5 - 4y^3 + c = \frac{4}{5}y^3\left(y^2-5\right) + c = -\frac{4}{5}\left(3-\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x}+2\right) + c.$$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2}\mathrm{d}x;$

Con la sostituzione $y = e^x$ si ottiene

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{e^{2x} + 1 + 2e^x}e^x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^2+1+2y}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{(y+1)^2}\mathrm{d}y = -\frac{1}{y+1} + c = -\frac{1}{e^x+1} + c.$$

8. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 + \cos x - \sin^2 x}\mathrm{d}x;$

Con la sostituzione $y = \cos x$ si ottiene

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x - \sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos x + \cos^2 x}(-\sin x)\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y+y^2}\mathrm{d}y;$$

a questo punto scomponiamo

$$\frac{1}{y+y^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{A+Ay+By}{y+y^2},$$

che ha per soluzioni $A = 1, B = -1$ e dunque

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1+\cos x - \sin^2 x} \mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{y+y^2} \mathrm{d}y \\
&= -\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) \mathrm{d}y \\
&= \log|y+1| - \log|y| + c \\
&= \log(1+\cos x) - \log|\cos x| + c.
\end{aligned}$$