Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 26/01/2026 *

Esercizio 1 (3 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione

$$a(1+i)z^7 = e^{i\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}. \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione: Scrivendo l'equazione come $z^7 = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{a(1+i)} = \dfrac{2}{a(i+1)} = \dfrac{\sqrt{2}}{a}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, le soluzioni sono

$$z = \frac{\sqrt[14]{2}}{\sqrt[7]{a}} e^{i\left(-\frac{\pi}{28}+\frac{2}{7}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Esercizio 2 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{ax} - e^{a\sqrt{x}}}{\ln x}. \qquad (a = \pm 2, \pm 3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{e^{ax} - e^{a\sqrt{x}}}{\ln x} &= \lim_{y\to 0} \frac{e^{a(1+y)} - e^{a\sqrt{1+y}}}{\ln(1+y)} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{e^a(1 + ay + o((ay))) - e^a\left(1 + a\sqrt{1+y} - a + o\left(\left(a\sqrt{1+y} - a\right)\right)\right)}{y + o(y)} \\
&= e^a \lim_{y\to 0} \frac{1 + ay + o(y) - \left(1 + \frac{a}{2}y + o(y)\right)}{y} \\
&= \frac{a}{2}e^a.
\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x)=\frac{|x|}{x^3+a}, \qquad (a=3,5,6,7)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per i valori che non annullano il denominatore, cioè

$$\left(-\infty,-\sqrt[3]{a}\right)\cup\left(-\sqrt[3]{a},+\infty\right).$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Il segno della funzione sarà lo stesso del denominatore, cioè

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x<-\sqrt[3]{a}\\ f(x) &= 0 \quad \text{per } x=0\\ f(x) &< 0 \quad \text{per } 0<x<-\sqrt[3]{a}, x>0 \end{aligned}$$

dunque in particolare il grafico di f interseca in $(0,0)$ l'asse orizzontale, e anche l'asse verticale.

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio vale

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0, \qquad \lim_{x\to-\sqrt[3]{a}^{\pm}} f(x)=\pm\infty,$$

dunque $y=0$ è un asintoto orizzontale e $x=-\sqrt[3]{a}$ è un asintoto verticale.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a-2x^3}{\left(x^3+a\right)^2} & x>0\\ \dfrac{2x^3-a}{\left(x^3+a\right)^2} & x<0\end{cases}$ si deduce che

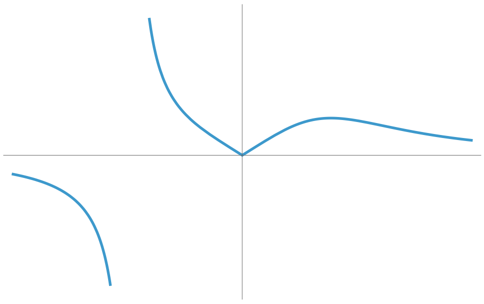
$$\begin{aligned} &f(x) \quad \text{è crescente per} \quad 0<x<\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\\ &f(x) \quad \text{è decrescente per} \quad x<-\sqrt[3]{a},-\sqrt[3]{a}<x<0,x>\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\\ &f(x) \quad \text{ha un minimo in} \quad x=0. \end{aligned}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{6x^5-12ax^2}{\left(x^3+a\right)^3} & x>0\\ \dfrac{12ax^2-6x^5}{\left(x^3+a\right)^3} & x<0\end{cases}$, opposto al segno del denominatore, si ottiene che

$$\begin{aligned} &f(x) \quad \text{è convessa per} \quad -\sqrt[3]{a}<x<0, x>\sqrt[3]{2a}\\ &f(x) \quad \text{è concava per} \quad x<-\sqrt[3]{a}, 0<x<\sqrt[3]{2a}\\ &f(x) \quad \text{ha un flesso in} \quad x=\sqrt[3]{2a}. \end{aligned}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_{-a+1}^{-a+2} \frac{\ln(x+a+1)}{(x+a)^3} \mathrm{d}x. \qquad (a = 3, 4, -2, -3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int_{-a+1}^{-a+2} \frac{\ln(x+a+1)}{(x+a)^3} \mathrm{d}x &\overset{(y=x+a)}{=} \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^3} \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\ln(x+1)}{2x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x+1}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{8} - \int_1^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{8} - \frac{1}{2}\left[\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x}\right]_1^2 \\
&= \frac{3}{8}\ln 3 - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (3 punti) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{(\sqrt{x}+a)\,(x+a)} \mathrm{d}x \qquad (a = 1, 2, 3, 4).$$

Soluzione: Poiché $\frac{1-\cos x}{(\sqrt{x}+a)\,(x+a)} \leq \frac{1}{(\sqrt{x}+a)\,(x+a)}$ e $\lim_{x\to+0^+} \frac{\frac{1}{(\sqrt{x}+a)(x+a)}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = 1$, allora l'integrale ha lo stesso andamento di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$, cioè

CONVERGE.

Esercizio 6 (3 punti) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\arcsin^2\frac{1}{\sqrt[3]{k+a}}. \qquad (a=1,2,3,4)$$

Soluzione: Poiché $\arcsin^2\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+a}}$ è positiva, infinitesima e decrescente, dal criterio per le serie alternate otteniamo che la serie

CONVERGE.

Esercizio 7 (6 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y''(x)+ay'(x)=a^2e^{-ax} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-a \end{cases}. \qquad (a=\pm 2,\pm 3)$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico $\lambda^2+a\lambda$ ha per radici $\lambda=-a, \lambda=0$, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono $c_1e^{-ax}+c_2$ e una soluzione particolare sarà da cercare nella forma $y(x)=cxe^{-ax}$; si ottiene una soluzione per $c=-a$ e dunque la soluzione generale sarà $y(x)=(c_1-ax)e^{-ax}+c_2$; imponendo le condizioni iniziali si ottiene $c_1=0, c_2=1$ e cioè

$$y(x)=1-axe^{-ax}.$$