Nome:	Cognome:	Matricola:

Esonero di Analisi I - 28/11/2025 *

Esercizio 1 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione

$$\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^5 = 1-i. \qquad (a=\pm 1, \pm i)$$

Soluzione: Scrivendo $1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$, le soluzioni dell'equazione risolvono $\frac{z-a}{z+a} = \sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{7}{20}\pi+\frac{2k}{5}\pi\right)}$, $k=0,1,2,3,4$, cioè

$$\begin{aligned}
z &= a\frac{1+\sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{7}{20}\pi+\frac{2k}{5}\pi\right)}}{1-\sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{7}{20}\pi+\frac{2k}{5}\pi\right)}}\\
&= a\frac{\left(1+\sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{7}{20}\pi+\frac{2k}{5}\pi\right)}\right)\left(1+\sqrt[10]{2}e^{-i\left(\frac{7}{20}\pi+\frac{2k}{5}\pi\right)}\right)}{\left|1-\sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{7}{20}\pi+\frac{2k}{5}\pi\right)}\right|^2}\\
&= a\frac{1-\sqrt[5]{2}}{1+\sqrt[5]{2}+2\sqrt[10]{2}\cos\left(\frac{7}{20}\pi+\frac{2k}{5}\pi\right)} - ia\frac{2\sqrt[10]{2}\sin\left(\frac{7}{20}\pi+\frac{2k}{5}\pi\right)}{1+\sqrt[5]{2}+2\sqrt[10]{2}\cos\left(\frac{7}{20}\pi+\frac{2k}{5}\pi\right)}
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln(n+a))^{\ln(n)+a}}{(n-a)^{|a|}}. \qquad (a=\pm 2, \pm 3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln(n+a))^{\ln(n)+a}}{(n-a)^{|a|}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{(\ln(n)+a)\ln\ln(n+a)}}{e^{|a|\ln(n-a)}}\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{(\ln(n)+a)\ln(\ln(n+a))-|a|\ln(n-a)}\\
&= e^{\lim_{n\to+\infty}\ln(n-a)\left(\left(1+\frac{a+\ln\left(1+\frac{a}{n-a}\right)}{\ln(n-a)}\right)\ln(\ln(n+a))-|a|\right)}\\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a\sin x)-ax}{\tan(b\tan x)-bx}. \qquad (a=2,3,5, b=2,3)$$

Soluzione: Dagli sviluppi di Taylor $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)=x+o(x)$, $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)=x+o(x)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a\sin x)-ax}{\tan(b\tan x)-bx} &= \frac{a\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)-\frac{(ax+o(x))^3}{6}+o\left((ax+o(x))^3\right)-ax}{b\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{(bx+o(x))^3}{3}+o\left((bx+o(x))^3\right)-bx}\\
&= \frac{ax-\frac{a+a^3}{6}x^3+o\left(x^3\right)-ax}{bx+\frac{b+b^3}{3}x^3+o\left(x^3\right)-bx}\\
&= \frac{-\frac{a+a^3}{6}+o(1)}{\frac{b+b^3}{3}+o(1)}\\
&\underset{x\to 0}{\to} -\frac{a+a^3}{2\left(b+b^3\right)}.
\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di due ore.

Esercizio 4 (12 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3ax^2 + 2a^2x}, \qquad \left(a = 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

determinandone:

(2 punti) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per ogni valore reale, cioè per

$$(-\infty, +\infty).$$

(2 punti) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Scrivendo $x^3 - 3ax^2 + 2a^2x = x(x-a)(x-2a)$ si ottiene che

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } 0 < x < a, x > 2a \\ f(x) &= 0 \quad \text{per } x = 0, a, 2a \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } 0 < x < a, \end{aligned}$$

dunque in particolare il grafico di f interseca l'asse orizzontale in $(0,0)$, e anche l'asse verticale.

(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio vale

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

inoltre $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = a$, dunque $y = x - a$ è un asintoto obliquo.

(2 punti) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6ax + 2a^2}{3\,(x^3 - 3ax^2 + 2a^2x)^{\frac{2}{3}}}$ si deduce che

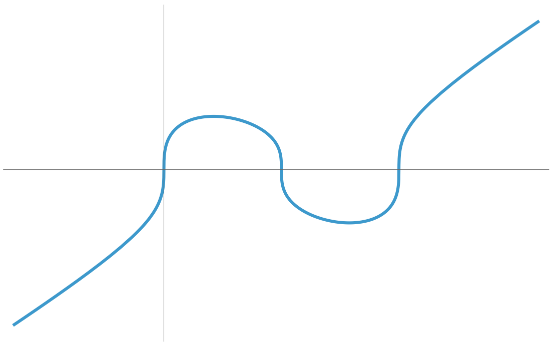
$$\begin{aligned} &f(x) \quad \text{è crescente per} \quad x < 0, 0 < x < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a, \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a < x < 2a, x > 2a \\ &f(x) \quad \text{è decrescente per} \quad \text{per } \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a < x < a, a < x < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a \\ &f(x) \quad \text{ha un massimo in} \quad \text{per } x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a \\ &f(x) \quad \text{ha un minimo in} \quad \text{per } x = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a. \end{aligned}$$

(2 punti) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = \dfrac{-6a^2x^2 + 12a^3x - 8a^4}{9\,(x^3 - 3ax^2 + 2a^2x)^{\frac{5}{3}}}$, che è opposto a quello del denominatore, si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x) &\quad \text{è convessa per} \quad x < 0, a < x < 2a \\ f(x) &\quad \text{è concava per} \quad 0 < x < a, x > 2a \\ f(x) &\quad \text{ha un flesso in} \quad x = 0, a, 2a. \end{aligned}$$

(2 punti) Grafico qualitativo.



Soluzione: