1. TEORIA SPETTRALE PER OP. COMPATTI ✓
2. OPERATORI "SIMMETRICI"
3. TEO. SPETTRALE PER OP. COMPATTI E "SIMMETRICI"

$\ker(A-\lambda I)$ $\rightsquigarrow$ $\ker(I-A)$ A op. COMPATTO

$\mathrm{ran}(A-\lambda I)$ $\qquad$ $\mathrm{ran}(I-A)$ PERTURBAZIONI COMPATTE DELL'IDENTITÀ

$\boxed{\text{PROP.}}$ SE $A \in K(X)$ ALLORA:

1. $\ker(I-A)$ HA DIM. FINITA
2. $\mathrm{ran}(I-A) \lhd X$
3. $\dfrac{X}{\mathrm{ran}(I-A)}$ HA DIM. FINITA

$\boxed{\text{OSS}}$ $\dfrac{X}{E} = \{x+E : x \in X\}$

$x \sim y \iff x-y \in E$

$\|x+E\|_{\frac{X}{E}} = \inf\{\|x+y\| : y \in E\} = d(x,E)$

È UNA NORMA SE $E \lhd X$

$\boxed{\text{LEMMA}}$ SE $A \in K(X)$, $E \underset{\neq}{\lhd} F \lhd X$ SONO TALI CHE $(I-A)F \subset E$

ALLORA $\exists\, x_0 \in F : \|x_0\| = 1$ $\|Ax_0 - Ay\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall y \in E$

(ABBIAMO VISTO: (*) SE $E \underset{\neq}{\lhd} F$ $\exists\, x_0 \in F : \|x_0\| = 1$ TALE CHE $\|x_0 - z\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall z \in E$)

DIM $Ax_0 - Ay = x_0 - (Ay - Ax_0 + x_0) = x_0 - (\underbrace{y - \underbrace{(I-A)(y+x_0)}_{\in E \text{ perché } (I-A)F \subset E}}_{z \in E})$

PRENDO x_0 COME IN (*) $\Rightarrow \|Ax_0 - Ay\| = \|x_0 - z\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall y \in E$.

DIM PROP.

1. SUPPONIAMO PER ASSURDO $\dim(\ker(I-A)) = +\infty$. ALLORA $\exists \{E_n\}$ SOTTOSPAZI $E_n \underset{\neq}{\lhd} E_{n+1} \lhd \ker(I-A)$. APPLICO IL LEMMA A $E_n \underset{\neq}{\lhd} E_{n+1} \lhd X$. POSSO FARLO PERCHÉ $(I-A)E_{n+1} = \{0\} \subset E_n$. ALLORA $\exists\, x_n \in E_n : \|x_n\| = 1$ $\|Ax_n - Ax_m\| \geq \frac{1}{2}$

LIMITATA $\qquad$ $\{Ax_n\}$ NON HA ESTRATTE CAUCHY

CONTRADDIZIONE CON A COMPATTO.

CONTRADDIZIONE CON A COMPATTO. LIMITATA $\{Ax_n\}$ NON HA ESTRATTE CAUCHY

(3) SUPPONIAMO PER ASSURDO $\dim \frac{X}{\mathrm{ran}(I-A)} = \infty$. ALLORA $\exists \{y_n\}$ PER CUI $\{y_n + \mathrm{ran}(I-A)\}$ SONO LIN. INDIP. APPLICO IL LEMMA A

$$E_n = \mathrm{span}\{y_1 \dots y_n, \underbrace{\mathrm{ran}(I-A)}_{\Rightarrow (I-A)E_{n+1} \subset \mathrm{ran}(I-A) \subset E_n}\} \Rightarrow \exists\, x_n \in E_n : \|x_n\|=1 \quad \|Ax_n - Ax_m\| \geq \frac{1}{2}$$

CONTRADDIZIONE CON A COMPATTO (COME PRIMA)

(2) PRENDO $\{x_n\}$ TALE CHE $(I-A)x_n \to y$, VOGLIO $y \in \mathrm{ran}(I-A)$.

ANZITUTTO, $\underbrace{d(x_n, \ker(I-A))}_{d_n} < +\infty$: SE $d_n \to \infty$, $\exists\, z_n \in \ker(I-A)$: $\left\|\frac{x_n - z_n}{d_n}\right\| \leq 2$

A COMPATTO $\Rightarrow A\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right) \xrightarrow{(*)} w$

INOLTRE $x_n - Ax_n$ LIMITATA $\Rightarrow \frac{x_n - Ax_n}{d_n} \to 0$

$$\underline{w - Aw} \xleftarrow{(*)} \frac{x_n - z_n}{d_n} - A\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right) = \underbrace{\frac{x_n - Ax_n}{d_n}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{z_n - Az_n}{d_n}}_{\to 0} = \underline{0}$$

PERCHÉ $z_n \in \ker(I-A)$

$w \in \ker(I-A)$, MA

$$d(w, \ker(I-A)) = \lim d\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}, \ker(I-A)\right) \overset{z_n \in \ker(I-A)}{=} \lim_{n\to\infty} d\left(\frac{x_n}{d_n}, \ker(I-A)\right) = 1$$

$\Rightarrow$ DEV'ESSERE d_n LIMITATA, CIOÈ $\exists\, z_n \in \ker(I-A)$: $\|x_n - z_n\| \leq C$

$$\underline{x_n - z_n} = x_n - Ax_n + A(x_n - z_n) - \underbrace{(I-A)z_n}_{0} \to \underline{y+v} \qquad A(x_n - z_n) \to v$$

$$\Rightarrow (I-A)x_n = (I-A)(x_n - z_n) \to (I-A)(y+v) \in \ker(I-A).$$

TEOREMA (ALTERNATIVA DI FREDHOLM)

SIA $A \in K(X)$, $K_n = \ker(I-A)^n$ $\quad R_n = \mathrm{ran}(I-A)^n$ PER $n \in \mathbb{N}$

ALLORA:

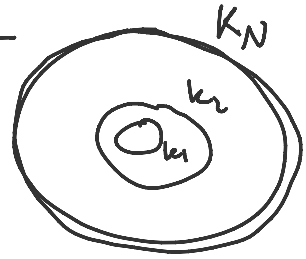
$K_n = \ker(I-A)^n \quad R_n = \mathrm{ran}(I-A)^n$ PER $n \in \mathbb{N}$

ALLORA:

① K_n, R_n SONO CHIUSI, $K_n \subset K_{n+1}$ $\dim K_n < +\infty$

$R_n \subset R_{n-1}$ $\dim \frac{X}{R_n} < +\infty$

② K_n, R_n SI STABILIZZANO, CIOÈ $\exists N \in \mathbb{N}$:



$K_N = K_{N+1} = \dots$ $R_N = R_{N+1} = \dots$

$X = K_N \oplus R_N$, $(I-A): K_N \to K_N$ NILPOTENTE

$(I-A): R_N \to R_N$ INVERTIBILE

③ $I - A$ È SURIETTIVO $\Leftrightarrow$ È INIETTIVO $N=1$ $R_1 = X$ $K_1 = \{0\}$

COROLLARIO DA ③ OTTENIAMO "FREDHOLM - CARLEMAN":

SE $(I-A)$ È INVERTIBILE, $(I-A)x = y$ HA UN'UNICA SOL. $\forall y$

ALTRIMENTI, $(I-A)x=y$ HA $\begin{cases} 0 \text{ SOLUZIONI SE } y \notin R_1 \\ \infty \text{ SOLUZIONI SE } y \in R_1 \end{cases}$

(SP. AFFINE DI DIMENSIONE PARI A K_1)

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{matrix} & \\ \underbrace{\qquad}_{M_1} & \begin{matrix} \lambda_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_2 \end{matrix} \\ & \underbrace{\qquad}_{M_2} \quad \dots \end{pmatrix}$$

FORMA CANONICA DI JORDAN

$A: \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^M$ SI PUÒ RAPPRESENTARE A BLOCCHI

(NON NECESSARIAMENTE $\lambda_i \neq \lambda_j$) $M_1 = M_2 = \dots = 1$ $\Leftrightarrow$ DIAGONALIZZABILE

$$I - A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda_1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 \\ & & & 1-\lambda_1 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} 1-\lambda_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 \\ & & & 1-\lambda_2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

SE $\lambda_j \neq 1$ $\forall j$, ALLORA $I-A$ INVERTIBILE

($N=1$, $K_1 = \{0\}$, $R_1 = \mathbb{C}^M$)

SE $\lambda_1 = 1$, ALLORA $\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 \\ & & & 0 \end{matrix} & \\ \underbrace{\qquad}_{M_1} & \end{pmatrix}$

$N = M_1$

$\mathbb{C}^M = \mathbb{C}^{M_1} \times \mathbb{C}^{M-M_1}$ $K_N = \mathbb{C}^{M_1}$

$\mathbb{C}^M = \mathbb{C}^{M_1} \times \mathbb{C}^{M-M_1}$ $\quad K_N = \mathbb{C}^{M_1}$

$X = \mathbb{C}^M,\ K_N = \mathbb{C}^{M_1},\ R_N = \mathbb{C}^{M-M_1}$ $\quad R_N = \mathbb{C}^{M-M_1}$

DIM. ALTERNATIVA DI FREDHOLM

① $K_n \subset K_{n+1}$: SE $x \in K_n$, $\quad (I-A)^n x = 0 \Rightarrow (I-A)^{n+1} x = (I-A)0 = 0 \Rightarrow x \in K_{n+1}$

$R_n \subset R_{n-1}$: SE $x \in R_n$, $x = (I-A)^n y = (I-A)^{n-1}(y - Ay) \in R_{n-1}$

PER IL RESTO DI ①, BASTA SCRIVERE $(I-A)^n = I -$ COMPATTO:

$n=2 \to (I-A)^2 = I - \underbrace{2A + A^2}_{\text{COMPATTO}}$ ($2A$: COMP., A^2: COMP.)

IN GENERALE, $(I-A)^n = I - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} A^j}_{\text{COMPATTO.}}$

② Ⓐ K_n SI STABILIZZANO DOPO N PASSI. SE NO, $K_n \subsetneq K_{n+1}$ $\forall n$.
APPLICO A $K_n \underset{\neq}{\triangleleft} K_{n+1} \triangleleft X$ IL LEMMA $\Rightarrow$ TROVO $x_n \in K_n$: $\|x_n\|=1$, $\|Ax_n - Ax_m\| \geq \frac{1}{2}$
CONTRADDIZIONE CON A COMPATTO.

Ⓑ R_n SI STABILIZZANO DOPO M PASSI. SE NO, $R_n \subsetneq R_{n-1}$ $\forall n$. APPLICO IL LEMMA A $R_n \underset{\neq}{\triangleleft} R_{n-1} \triangleleft X$, TROVO UNA CONTRADDIZIONE COME PRIMA

Ⓒ $K_N \cap R_N = \{0\}$: SE $y \in K_N \cap R_N$, $(I-A)^N y = 0$, $y = (I-A)^N x$ $\Rightarrow (I-A)^{2N} x = 0$

$x \in K_{2N} = K_N$ (K_N SI STABILIZZANO)

$\Rightarrow \underbrace{(I-A)^N x}_{y} = 0 \Rightarrow y = 0.$

Ⓓ $M \leq N$: PRENDO $x \in \underline{R_{M-1}} \setminus R_M \Rightarrow (I-A)x \in R_M = (I-A)R_M$, CIOÈ
$(I-A)x = (I-A)y$ CON $y \in \underline{R_M} \Rightarrow x - y \in R_{M-1} + R_M \in R_{M-1}$.

$x - y \neq 0$ PERCHÉ $x \notin R_M \ni y$.

$\Rightarrow K_{M-1} \cap R_{M-1} \neq \{0\}$
$K_N \cap R_N = \{0\}$ $\Rightarrow M - 1 < N$ $\quad (I-A)(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in K_{M-1}$.

$K_N \cap R_N = \{0\} \Rightarrow M-1 < N \quad (I-A)(x-y)=0 \Rightarrow x-y \in K_{M-1}$.

(E) $X = K_N \oplus R_N$: DA (C) BASTA MOSTRARE $X = K_N + R_N$

PRENDO $x \in X$, CERCO $y \in R_N$ TALE CHE $x-y \in K_N$.

$R_N = R_{2N} \Rightarrow (I-A)^N x = (I-A)^N y$ CON $y \in R_N$, $(I-A)^N(x-y) = 0 \Rightarrow x-y \in K_N$.

(F) $(I-A)K_N = K_{N-1} \subset K_N$, $(I-A)^N|_{K_N} \equiv 0$ PER DEF. $\Rightarrow$ NILPOTENTE

$(I-A)R_N = R_{N+1} \subset R_N$

POICHÉ $R_{N+1} = R_N$, $(I-A)R_N = R_N \Rightarrow (I-A)|_{R_N}$ SURIETTIVA. È ANCHE INIETTIVA PERCHÉ SE $y \in \underset{R_{2N-1}}{\overset{\parallel}{R_N}}$, $(I-A)y = 0$

$R_N = R_{2N-1} \Rightarrow y = (I-A)^{N-1} x \quad x \in \underline{R_N}$

$0 = (I-A)y = (I-A)^N x \Rightarrow x \in \underline{K_N}$

MA $K_N \cap R_N = \{0\} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$ CIOÈ $(I-A)|_{R_N}$ INIETTIVA.

(3) SE $(I-A)$ INIETTIVO $\Rightarrow K_1 = \{0\} \Rightarrow K_2 = \{0\} \dots \Rightarrow N=1 \quad X = \underset{\{0\}}{K_1} \oplus R_1 \Rightarrow R_1 = X$ CIOÈ SURIETTIVO

SE $(I-A)$ SURIETTIVO $\Rightarrow R_1 = X \Rightarrow R_2 = X \dots \Rightarrow X = \underset{X}{R_N} \oplus K_N \Rightarrow K_N = \{0\}$

MA $K_N \supset \ker(I-A)$

$\Rightarrow I-A$ INIETTIVO.

TEOREMA SPETTRALE PER OPERATORI COMPATTI

SIA $A \in K(X)$. ALLORA:

$$(A - \lambda I) = -\lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)$$

(1) $0 \in \sigma(A)$ SE $\dim X = +\infty$

(2) SE $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ ALLORA λ È AUTOVALORE

(3) $\forall \lambda \; \exists!\; K(\lambda), R(\lambda)$ TALI CHE $X = R(\lambda) \oplus K(\lambda)$ CON $(A - \lambda I): R(\lambda) \to R(\lambda)$ INVERTIBILE

E $(A - \lambda I): N(\lambda) \to N(\lambda)$ NILPOTENTE

(4) $K(\lambda) \supset \ker(A - \lambda I)$, $R(\lambda) \subset \mathrm{Ran}(A - \lambda I)$

(5) $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ È DISCRETI $\Rightarrow$ LO SPETTRO È FINITO OPPURE

È UNA SUCCESS...

5) $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ È DISCRETI $\Rightarrow$ LO SPETTRO È FINITO OPPURE È UNA SUCCESSIONE CHE SI ACCUMULA IN 0.

6) SE $\lambda, \mu \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, $\lambda \neq \mu$ ALLORA $K(\mu) \subset R(\lambda)$.

ESEMPI

1) $A: \ell_2 \to \ell_2$ $\quad a_n \to 0$ COMPATTO. CONCENTRO $\sigma(A)$.

$(x(1), x(2) \dots) \to (a_1 x(1), a_2 x(2) \dots)$

$\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_P(A)$ (SEGUE DA 2)

$\lambda \in \sigma_P(A) \Leftrightarrow \lambda = a_n$ PER QUALCHE a_n

$A e_n = a_n e_n$ AUTOVETTORE

SE $a_n = 0$ PER QUALCHE n, ALLORA $0 \in \sigma_P(A)$

ALTRIMENTI, $0 \in \sigma_C(A)$ PERCHÉ $\mathrm{ran}(A)$ È DENSO (VEDI $a_n = \frac{1}{n}$) $\Rightarrow \sigma(A) = \{a_n\} \cup \{0\}$

2) $B = \ell_2 \to \ell_2$ $\qquad B = \underbrace{\text{SHIFT DX}}_{\text{CONTINUO}} \circ \underbrace{A}_{\text{COMPATTO}} \Rightarrow B$ COMPATTO

$(x(1), x(2) \dots) \to (0, a_1 x(1), a_2 x(2) \dots)$

AUTOVALORI: $Ax = \lambda x \Leftrightarrow$ $0 = \lambda x(1) \Rightarrow x(1) = 0$, $a_1 x(1) = \lambda x(2) \Rightarrow x(2) = 0$ ...

NO AUTOVALORI

$\sigma(A) = \{0\}$ SPETTRO RESIDUO

$\mathrm{ran}(A) \subset e_1^\perp$ NON DENSO

IN GENERALE, $\{0\}$ PUÒ ESSERE SIA SP. PUNTUALE SIA CONTINUO SIA RESIDUO.

3) $A: C([0,1]) \to C([0,1])$ È COMPATTO PER ASCOLI-ARZELÀ:

$f \longrightarrow \int_0^x f$

SE $\|f_n\|_\infty \leq C$ ALLORA Af_n È EQUI CONTINUA:

$|x-y| < \delta \Rightarrow |Af_n(x) - Af_n(y)| = \left|\int_x^y f_n\right| \leq |x-y| \, \|f_n\|_\infty \leq \delta C = \varepsilon$ ✓

AUTOVALORI:

$Af = \lambda f \Leftrightarrow \int_0^x f = \lambda f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \lambda f'(x) \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \equiv 0 \Rightarrow$ NO AUTOVALORI

$\sigma(A) = \{0\}$:(

4) $A: C([0,1]) \to C([0,1])$

$f \to \int_0^x f - \int_0^1 \left(\int_0^y f\right) dy$

COMPATTO COME PRIMA

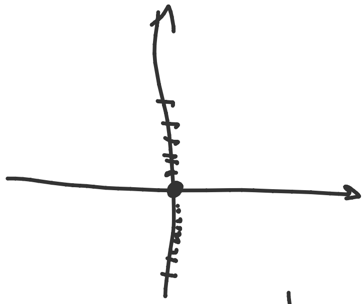
TROVO AUTOVALORI!

$$A f(x) = \lambda f(x) \iff \begin{cases} f'(x) = \dfrac{f(x)}{\lambda} \\ \int_0^1 f = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = C e^{\frac{x}{\lambda}}$$

$$A f = \int_0^x f - \int_0^1 \left(\int_0^y f\right) dy$$

$$\int_0^1 f = C\left(e^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right) = 0$$

$\lambda = \dfrac{i}{2n\pi}$ con $n \in \mathbb{Z}$



$\sigma(A) = \{0\} \cup \left\{\dfrac{i}{2n\pi}\right\}$:)

$$\underline{\lambda f(x)} = \underline{\int_0^x f - \int_0^1 \left(\int_0^y f\right) dy} \xrightarrow{\int_0^1} \lambda \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^x f\right) dy - \int_0^1 \left(\int_0^y f\right) dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$