PAUSA PASQUALE: V 2/4, M 6/4
PAUSA ESONERI: M 20/4, V 23/4 } NO LEZIONI

TEOREMA DI BANACH-STEINHAUS (O DI UNIFORME LIMITATEZZA)

SIANO $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ OPERATORI LINEARI TRA X SP. DI BANACH E Y SP. NORMATO LIMITATI PUNTUALMENTE, CIOÈ

$\boxed{\sup_\alpha \|A_\alpha x\|_Y < +\infty}$ $\forall x \in X$.

ALLORA GLI $\{A_\alpha\}$ SONO LIMITATI ANCHE IN NORMA

CIOÈ $\boxed{\sup_\alpha \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty}$

OSS IL TEOREMA È FALSO SE X NON È COMPLETO.

$X = c_{00} = \{x: \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists K \in \mathbb{N} : x(k) = 0 \ \forall k > K\}$ "SUCC. DEFINITIVAMENTE NULLE"

$\|\cdot\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|$. CONSIDERO $L_n \in X^*$ $\quad L_n: X \longrightarrow \mathbb{R}$

$x = (x(1), \dots, x(K), 0, \dots) \to n x(n)$

$\{L_n\}$ È LIMITATA PUNTUALMENTE:

FISSO x, $\sup_n |L_n x| = \max\{|x(1)|, 2|x(2)|, \dots, K|x(K)|\} < +\infty$

(K TALE CHE $x(k) = 0$ SE $k > K$)

MA $\{L_n\}$ NON È LIMITATO IN NORMA:

$\|L_n\|_{X^*} = n \longrightarrow \infty$

DIM SCRIVO X COME UNIONE NUMERABILE DI CHIUSI

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : \sup_\alpha \|A_\alpha x\| \le n\} = \bigcup \{x \in X : \|A_\alpha x\| \le n \ \forall \alpha \in I\}$$

$$= \bigcup \bigcap_\alpha \underbrace{\{x \in X : \|A_\alpha x\| \le n\}}_{\text{CHIUSO PERCHÉ ...}}$$

$\Rightarrow \bigcap \{x \in X : \|A_\alpha x\| \le n\} = C_n$

α

$$\Rightarrow \bigcap_\alpha \underbrace{\{x\in X : \|A_\alpha x\| \le n\}} = C_n$$

È CHIUSO PERCHÉ INTERSEZIONE DI CHIUSI

CHIUSO PERCHÉ PREIMMAGINE DI $[-n,n]$ RISPETTO A $\|A_\alpha x\|$

$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ $\quad$ X È DI II CATEGORIA CIOÈ <u>NON</u> PUÒ ESSERE UNIONE NUMERABILE DI CHIUSI CON INTERNO VUOTO

$\exists n_0 : C_{n_0} \supset B_\delta(x_0)$ PER QUALCHE $x_0\in X$, $\delta>0$

CIOÈ $\forall y\in B_\delta(x_0)$, $\|A_\alpha y\| \le n_0$ (STIMA UNIFORME SU $B_\delta(x_0)$)

$\underline{\forall x\in B_1(0)}$ $\quad \|A_\alpha(\delta x + x_0)\|$

$$\|A_\alpha x\| = \frac{\|A_\alpha(\delta x)\|}{\delta} \le \frac{\|A_\alpha(\delta x+x_0)\| + \|A_\alpha(x_0)\|}{\delta} \le \frac{n_0 + \|A_\alpha x_0\|}{\delta}$$

$$\text{(LIM. PUNTUALE)} \le \frac{n_0 + C_{x_0}}{\delta}$$

PASSO AL $\sup_{\alpha, x}$:

$$\sup_\alpha \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \frac{n_0 + C_{x_0}}{\delta} < +\infty .$$

OSS IL TEOREMA VALE LO STESSO SE $\sup_\alpha \|A_\alpha x\| < +\infty$ $\forall x\in Z$ PER QUALCHE $Z\subset X$ DI II° CATEGORIA IN X. INFATTI, BASTA SCRIVERE $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ CHIUSI NUMERABILI $\Rightarrow$ C_{n_0} HA INTERNO NON VUOTO, ... (COME PRIMA)

COROLLARI

$Y=\mathbb{R}$

① SE X È BANACH, $\{L_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X^*$ SONO TALI CHE $\sup_\alpha |L_\alpha x| < +\infty$ $\forall x\in X$, ALLORA $\sup_\alpha \|L_\alpha\| < +\infty$

② SE $\{x_\alpha\}\subset X$ VERIFICANO $\sup_\alpha |L x_\alpha| < +\infty$ $\forall L\in X^*$, ALLORA $\sup_\alpha \|x_\alpha\| < +\infty$

(NON SERVE X BANACH PERCHÉ STO CONSIDERANDO $\Lambda_\alpha : L \to L x_\alpha$

$\{\Lambda_\alpha\}\subset X^{**}$ COMPLETO

③ SE $H \in$ HILBERT, $\{x_\alpha\}$ VERIFICA $\sup_\alpha |(x_\alpha, y)| < +\infty \ \forall y \in H$
ALLORA $\sup_\alpha \|x_\alpha\| < +\infty$

④ SE $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ È TALE CHE $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} x(k) y(k) \text{ CONVERGE } \forall y \in \ell_p}_{(*)}$
ALLORA $x \in \ell_{p'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ p \in [1, +\infty]\right)$: CONSIDERO LE "TRONCATE"

$L_n : \ell_p \to \mathbb{R}$
$y \to \sum_{k=1}^{n} x(k) y(k)$ PER IPOTESI, DA (*) OTTENGO $\sup_\alpha |L_n y| < +\infty \ \forall y$

$$\Rightarrow \sup_n \|L_n\| < +\infty \qquad \Rightarrow x \in \ell_{p'}$$

$$\|L_n\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \qquad \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \|x\|_{\ell^{p'}}$$

OSS GRAZIE A BANACH-STEINHAUS POSSIAMO RI-DIMOSTRARE
$Z = \bigcup_{p>1} L^p([0,1])$ È DI I CATEGORIA IN $X = L^1([0,1])$: BASTERÀ
TROVARE $\{L_n\} \subset X^*$ TALE CHE $\sup_n |L_n f| < +\infty \ \forall f \in Z$ MA
$\|L_n\|_{X^*} \to \infty$ $\qquad L_n : f \to (\log n) \int_0^{\frac{1}{n}} f = \int_0^1 f g_n \qquad g_n = \chi_{[0, \frac{1}{n}]} \log n$

$$\Rightarrow \|L_n\|_{X^*} = \|g_n\|_{L^\infty} = \log n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

MA SE $f \in L^p$, $|L_n f| \le \frac{\log n \, \|f\|_p}{n^{1-\frac{1}{p}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow \{L_n f\}$ LIMITATO

PROPOSIZIONE SIA $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ SUCCESSIONE DI OP. LINEARI (X BANACH, Y NORMATO)
TALE CHE $A_n x \to A(x) \ \forall x \in X$. ALLORA:

① $\sup_n \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$

② LA MAPPA LIMITE È $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

③ $\|A\| \le \liminf \|A_n\|$

③ $\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$

OSS PUÒ VALERE $<$ IN ③. AD ESEMPIO $\{L_n\} \subset \ell_2^*$ $\quad L_n : \ell_2 \to \mathbb{R}$, $x \to x(n)$

$L_n x = x(n) \longrightarrow 0 \implies$ LA MAPPA LIMITE È $L \equiv 0$

MA $\|L_n\| = 1$ $\quad \left(L_n : x \to (x, e_n) \implies \|L_n\|_{\ell_2^*} = \|e_n\|_{\ell_2} = 1 \right)$

DIM ① SE $\{A_n x\}$ CONVERGE A x FISSATO, È LIMITATA PUNTUALMENTE

$\implies$ PER BANACH-STEINHAUS $\sup \|A_n\| < +\infty$

② $$\begin{matrix} A_n(\alpha x + \beta y) \longrightarrow A(\alpha x + \beta y) \\ \| \\ \alpha A_n x + \beta A_n y \to \alpha A(x) + \beta A(y) \end{matrix} \implies A \text{ LINEARE}$$

③ $\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \, \|x\| \implies \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$

PASSO AL $\sup_{x\neq 0}$ $\quad \|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$

PROPOSIZIONE DATA f CONTINUA E PERIODICA SU $[-\pi, \pi]$ $f \in C(S^1) = \{ f \in C([-\pi,\pi]) : f(\pi) = f(-\pi) \}$

DEFINISCO $$S_N f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\,dt$$

ALLORA $\exists f \in C(S^1)$ PER CUI $S_N f(0) \not\to f(0)$

DIM VOGLIO FAR VEDERE CHE $f \to S_N f(0)$ NON È LIMITATO IN NORMA $\implies$ NON È LIMITATO PUNTUALMENTE

$$S_N f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} e^{-int}}_{\shortparallel} dt$$

$$S_N f(0) = \int f \, D_N$$

$$S_N f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f\, D_N$$

PER FAR VEDERE CHE È ILLIMITATO IN NORMA ($\Rightarrow$ CONCLUSIONE) BASTA MOSTRARE $\|D_N\|_{L^1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$.

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\,dt \underset{\left|\sin\frac{t}{2}\right| \le \frac{|t|}{2}}{\geq} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right|}{|t|}\,dt \underset{s=\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{|\sin s|}{|s|}\,ds$$

$$\to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\sin s|}{|s|}\,ds = +\infty$$

OSS | UTILIZZANDO BANACH-STEINHAUS "GENERALIZZATO", $S_N f(0)$ DIVERGE PER f IN UN INSIEME DENSO DI $C(S^1)$

$Z = \{ f : S_N f(0) \text{ CONV. PUNTUALMENTE} \}$ SARÀ DI I CATEGORIA:
SE FOSSE DI II CATEGORIA, $f \to S_N f(0)$ È LIMITATO IN NORMA

$Z^c = \{ f : S_N f(0) \text{ NON CONVERGE} \}$ È COMPLEMENTARE DI I CATEGORIA
CIOÈ INTERSEZ. NUMERABILE DI APERTI DENSI $\overset{\text{BAIRE}}{\Rightarrow}$ DENSO

OSS | SE f È HÖLDERIANA, ($|f(x)-f(y)| \le C|x-y|^\alpha$ PER $\alpha \in (0,1)$)
ALLORA $S_N f(0) \to f(0)$ (LE SERIE DI FOURIER CONVERGONO)
PER IL "TEST DEL DINI": $\dfrac{|f(t)-f(0)|}{|t|} \le \dfrac{C}{t^{1-\alpha}} \in L^1(S^1)$

$\Rightarrow$ LE f HÖLDERIANE SONO DI I CAT. TRA LE CONTINUE