TEOREMA DI BANACH-ALAOGLU

SIA X^* IL DUALE DI UNO SP. NORMATO X. ALLORA LA PALLA UNITÀ CHIUSA

$$B = \overline{B_1(0)} = \{ L \in X^* : \|L\| \leq 1 \}$$ È COMPATTA NELLA TOPOLOGIA $\sigma(X^*, X)$

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ SE X È RIFLESSIVO, ALLORA B È COMPATTA IN $\sigma(X^*, X^{**})$

TEOREMA DI TYCHONOFF

SIA X INSIEME QUALSIASI E SIA

$$\mathbb{R}^X = \prod_{x \in X} \mathbb{R}_x = \{ f : X \to \mathbb{R} \}$$

CON LA TOPOLOGIA PRODOTTO, CHE HA PER INTORNI

$$U_{x_1 \dots x_n, \varepsilon}(f_0) = \{ f \in \mathbb{R}^X : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \}$$

SE $F \subset \mathbb{R}^X$ VERIFICA $\sup_{f \in F} |f(x)| < +\infty \ \forall x \in X$

ALLORA F È RELATIVAMENTE COMPATTO

ALLORA F È RELATIVAMENTE COMPATTO.

$\boxed{\text{DIM. BANACH-ALAOGLU}}$ $X^* \subset \mathbb{R}^X$ E LA TOP.
$\sigma(X^*, X)$ SU X^* È LA RESTRIZIONE DELLA TOP. PRODOTTO.

INOLTRE B È LIMITATA PUNTUALMENTE:

$$\sup_{L\in B} |Lx| \le \underbrace{\cancel{\|L\|}}_{\le 1} \|x\| \le \|x\| < +\infty \quad \forall x \in X$$

$\Rightarrow B$ È REL. COMPATTO PER TYCHONOFF

BASTA FAR VEDERE CHE B È CHIUSO.

$$B = \{ f \in \mathbb{R}^X : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \ \forall x, y \in X \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$\cap \{ f \in \mathbb{R}^X : -\|x\| \le f(x) \le \|x\| \ \forall x \in X \}$$

$$= \bigcap_{\alpha,\beta,x,y} \{ f \in \mathbb{R}^X : \underline{f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)} = 0 \}^{(*)} \cap$$

$$\bigcap_{x} \{ f \in \mathbb{R}^X : f(x) \in [-\|x\|, \|x\|] \}^{(**)}$$

(**) È CHIUSO PERCHÉ $[-\|x\|, \|x\|]$ È CHIUSO E
$f \to f(x)$ È CONTINUA RISPETTO ALLA TOP. PRODOTTO

(*) È CHIUSO PERCHÉ $\{0\}$ È CHIUSO E

$f \to f(\alpha x+\beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)$ È CONTINUA

$\Rightarrow B$ È INTERSEZIONE DI CHIUSI $\Rightarrow$ <u>CHIUSA</u>

B È REL. COMPATTA + CHIUSA $\Rightarrow B$ È <u>COMPATTA</u>

$\boxed{\text{LEMMA}}$ X È RIFLESSIVO $\Leftrightarrow X^*$ È RIFLESSIVO

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ ① SE X È RIFLESSIVO ALLORA $\overline{B_1(0)} \subset X$ È COMPATTA IN $\sigma(X, X^*)$

② $L^\infty([0,1])$, ℓ_∞ <u>NON</u> SONO RIFLESSIVI PERCHÉ DUALI DI SPAZI NON RIFLESSIVI

$\boxed{\text{DIM. LEMMA}}$ ($\Rightarrow$) SUPPONIAMO X RIFLESSIVO, CIOÈ OGNI $\Lambda \in X^{**}$ È DEL TIPO $\Lambda: L \to Lx$ $(\Lambda = J(x))$. PRENDO $\alpha \in X^{***}$, VOGLIO $\alpha\Lambda = \Lambda L$ PER QUALCHE $L \in X^*$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "J"] \arrow[rr, bend right, "\alpha\circ J"'] & X^{**} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

PONGO $L = \alpha \circ J$:

$$\underset{\forall \Lambda\, \exists x:\, J(x)=\Lambda}{\alpha\Lambda = \alpha(J(x))} \underset{\text{DEF. } L}{=} Lx \underset{\Lambda = J(x)}{=} \Lambda L$$

($\Leftarrow$) SUPPONIAMO PER ASSURDO X^* RIFLESSIVO MA X NO, CIOÈ $\exists\, \underline{\Lambda_0} \in X^{**} \setminus \underline{J(X)}$. $\exists\, \alpha \in X^{***}$ TALE CHE

$\alpha\Lambda_0 \neq 0$ E $\alpha|_{J(X)} \equiv 0$ (COR. DI HAHN-BANACH)

SICCOME X^* È RIFLESSIVO, $\alpha: \Lambda \longrightarrow \Lambda L$ PER QUALCHE

$J(x)$

SICCOME X^* È RIFLESSIVO, $\alpha : \Lambda \longrightarrow \Lambda L$ PER QUALCHE $L \in X^*$
OTTENIAMO LA SEGUENTE CONTRADDIZIONE

$0 = \alpha J(x) = J(x) L = Lx \quad \forall x \in X \Rightarrow L \equiv 0 \Rightarrow \alpha \equiv 0$
IN PARTICOLARE $\alpha \Lambda_0 = 0$, MA SUPPONEVAMO $\alpha \Lambda_0 \neq 0$
ASSURDO!

TEOREMA DI KAKUTANI

UNO SP. DI BANACH X È RIFLESSIVO $\iff \overline{B_1(0)} \subset X$ È COMPATTA RISPETTO A $\sigma(X, X^*)$

LEMMA DI GOLDSTINE

SIA $J : X \to X^{**}$ L'ISOMETRIA CANONICA E $B = \overline{B_1(0)} \subset X$. ALLORA $J(B) \subset \overline{B_1(0)} \subset X^{**}$ È DENSO RISPETTO A $\sigma(X^{**}, X)$

OSS SE CONSIDERO LA TOP. FORTE, $J(B) \subset \overline{B_1(0)}$ È DENSO SOLO SE X È RIFLESSIVO $\left(J(B) = \overline{B_1(0)} \right)$
INFATTI, $J(B)$ È COMPLETO $\Rightarrow$ CHIUSO IN $\overline{B_1(0)}$, DUNQUE È DENSO SOLO SE SONO UGUALI!

DIM. LEMMA DI GOLDSTINE

MOSTRO CHE $J(B)$ INTERSECA TUTTI GLI APERTI DI $\overline{B_1(0)}$ IN $\sigma(X^{**}, X^*)$. FISSO $\Lambda_0 \in X^{**}$ CON $\|\Lambda_0\| \leq 1$
PRENDO $U = U_{L_1, \dots, L_n, \varepsilon}(\Lambda_0)$ VOGLIO $J(x) \in U$ PER

PRENDO $U = U_{L_1,\dots,L_N,\varepsilon}(\Lambda_0)$ VOGLIO $J(x) \in U$ PER QUALCHE x. $\underline{|L_i x - \Lambda_0 L_i| < \varepsilon}$

SUPPONIAMO NON SIA COSÌ. CONSIDERO $X \xrightarrow{A} \mathbb{R}^N$

$x \longrightarrow \underline{(L_1 x, \dots, L_N x)}$

ALLORA $\|Ax - Y_0\| \geq \varepsilon$ $\quad \underline{Y_0} = (\Lambda_0 L_1, \dots, \Lambda_0 L_N)$ $\quad \forall x \in B$

CIOÈ $Y_0 \notin \overline{A(B)}$ $\Rightarrow$ SEPARO $\{Y_0\} \in \overline{A(B)}$ CON LA II FORMA GEOMETRICA DI HAHN-BANACH

$\exists c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}^N$: $\exists \alpha \in \mathbb{R}$: $c_1 (Ax)_1 + \dots + c_N (Ax)_N < \alpha < c_1 Y_{01} + \dots + c_N Y_{0N}$

$$\underbrace{c_1 (Ax)_1 + \dots + c_N (Ax)_N}_{= \sum_{i=1}^N c_i L_i x} < \alpha < \underbrace{c_1 Y_{01} + \dots + c_N Y_{0N}}_{= \sum_{i=1}^N c_i \Lambda_0 L_i}$$

PASSO AL $\sup_{\|x\| \leq 1}$.

$$\underline{\|\textstyle\sum c_i L_i\|} \leq \alpha < \Lambda_0 (\textstyle\sum c_i L_i) \leq \|\Lambda_0\| \|\textstyle\sum c_i L_i\| \leq \underline{\|\textstyle\sum c_i L_i\|}$$

CONTRADDIZIONE $\Rightarrow$ DEV'ESSERE $J(x) \in U$ PER QUALCHE $x \in B$ CIOÈ DENSITÀ IN $\sigma(X^{**}, X^*)$

$\boxed{\text{DIM. TEOREMA KAKUTANI}}$ $\Rightarrow$ GIÀ VISTO

$\Leftarrow$ SUPPONIAMO CHE $\overline{B_1(0)}$ SIA COMPATTA IN $\sigma(X, X^*)$

$J(\overline{B_1(0)}) \subset X^{**}$ È COMPATTA IN $\sigma(X^{**}, X^*)$ PERCHÉ J È CONTINUA TRA $(X, \sigma(X, X^*))$ E $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$.

INFATTI $\underline{J^{-1}}(U_{L_1 \dots L_N, \varepsilon}(J(x_0))) = U_{L_1, \dots, L_N, \varepsilon}(x_0)$

INFATTI $\underbrace{J^{-1}\left(U_{L_1,\dots,L_n,\varepsilon}(J(x_0))\right)}_{\text{PREIMMAGINE DI APERTO FONDAMENTALE IN } \sigma(X^{**},X^*)} = \underbrace{U_{L_1,\dots,L_n,\varepsilon}(x_0)}_{\text{APERTO FONDAMENTALE IN } \sigma(X,X^*)}$

$J(\overline{B_1(0)}) \subset X^{**}$ È COMPATTA $\Rightarrow$ CHIUSA IN $\overline{B_1(0)}$ | RISPETTO

LEMMA DI GOLDSTINE: $J(\overline{B_1(0)}) \subset \overline{B_1(0)}$ DENSA | A $\sigma(X^{**},X^*)$

CHIUSO + DENSO $\Rightarrow$ $J(\overline{B_1(0)}) = \overline{B_1(0)}$

PER OMOGENEITÀ, $J(X) = X^{**}$, CIOÈ X RIFLESSIVO.

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ SE X^* È SEPARABILE ALLORA ANCHE X È SEPARABILE

$\boxed{\text{OSS}}$ IL VICEVERSA È FALSO: $X = L^1$ È SEPARABILE MA IL SUO DUALE $X^* = L^\infty$ NON LO È.

$\boxed{\text{DIM}}$ SIA $\{L_n\}$ DENSA IN X^*. $\exists\, x_n \in X$: $\|x_n\| = 1$, $L_n x_n \geq \frac{\|L_n\|}{2}$. CONSIDERO

$$Y = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{x_n\} = \{c_1 x_1 + \dots + c_n x_n : c_i \in \mathbb{Q}\}$$

Y È NUMERABILE ED È DENSO IN $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{x_n\}$.

BASTA FAR VEDERE $\mathrm{span}\{x_n\}$ DENSO IN X.

DA UN COROLLARIO DI

BASTA FAR VEDERE SPAN$\{x_n\}$ DENSO IN X.
DA UN COROLLARIO DI HAHN-BANACH, FACCIO VEDERE CHE SE $L|_{SPAN\{x_n\}} \equiv 0$, $L \equiv 0$ SU X:
DATO L, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists L_n : \|L - L_n\| < \varepsilon$, $\exists x_n : L_n x_n \geq \frac{\|L_n\|}{2}$
$$\Rightarrow \|L\| \leq \|L - L_n\| + \|L_n\| \leq \varepsilon + 2 L_n x_n = \varepsilon + 2(L_n x_n - L x_n)$$
$$\leq \varepsilon + 2\|L_n - L\| \|x_n\| \leq 3\varepsilon$$
MA ε ARBITRARIO $\Rightarrow \|L\| = 0$, CIOÈ $L \equiv 0$ E SPAN$\{x_n\}$ DENSO, CIOÈ X SEPARABILE.

COROLLARIO X È RIFLESSIVO E SEPARABILE $\Leftrightarrow$ X^* È RIFLESSIVO E SEPARABILE

DIM ($\Leftarrow$) SE X^* RIFLESSIVO $\Rightarrow$ X RIFLESSIVO PER IL LEMMA
SE X^* SEPARABILE $\Rightarrow$ X SEPARABILE PER LA PROP.
($\Rightarrow$) X È RIFLESSIVO E SEPARABILE $\Rightarrow$ X^{**} È UNA COPIA DI X
X^{**} È RIFLESSIVO E SEPARABILE $\Rightarrow$ COME PRIMA, X^* È RIFLESSIVO E SEPARABILE.

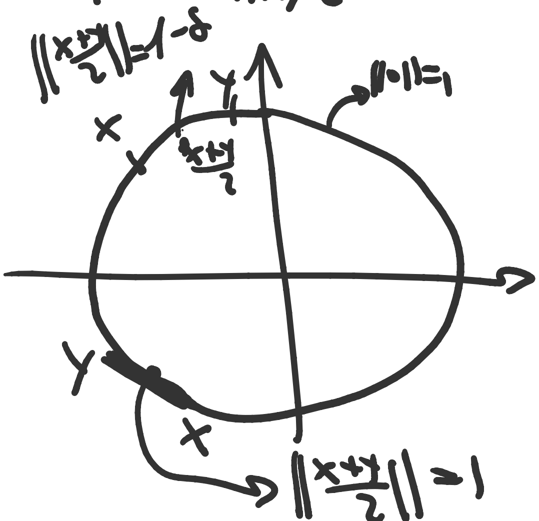
ESEMPIO $X = L^p$ $1 < p < +\infty$ $\Rightarrow$ X E X^* RIFLESSIVI E SEPARABILI
$X = L^1$ SEPARABILE MA NON RIFLESSIVO, X^* NÉ SEPARABILE NÉ RIFLESSIVO
$X = L^\infty$ NÉ SEPARABILE NÉ RIFLESSIVO, X^* NÉ SEPARABILE NÉ RIFL.

SPAZI UNIFORMEMENTE CONVESSI

DEF UN BANACH X SI DICE UNIFORMEMENTE

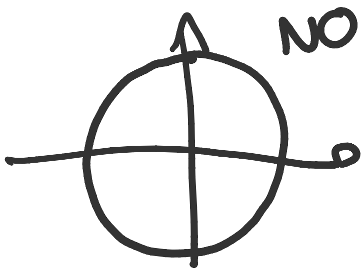
DEF UN BANACH X SI DICE <u>UNIFORMEMENTE CONVESSO</u> SE $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\|x\| = \|y\| = 1 \\ \|x-y\| \geq \varepsilon\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$$



NON CI SONO SEGMENTI SULLA SFERA ($\Rightarrow$ PALLA È STRETTAMENTE CONVESSA)
UNIFORMEMENTE IN x, y

ESEMPI ① GLI SPAZI DI HILBERT SONO UNIF. CONVESSI
NO SEGMENTI



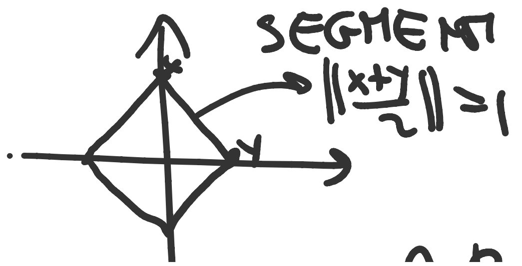
REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \sqrt{\frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2} - \frac{\|x-y\|^2}{4}}$$

$$(\|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|\geq\varepsilon) \Longrightarrow \leq \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}} = 1-\delta_\varepsilon$$

DOVE $\delta_\varepsilon = 1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$

② L^1 NON È UNIF. CONVESSO
SEGMENTI SULLA SFERA.



SU $L^1(\mu)$ GENERICO

CONSIDERO $f = \frac{\chi_A}{\mu(A)}$ $g = \frac{\chi_B}{\mu(B)}$

$\mu(A)$ $\mu(B)$

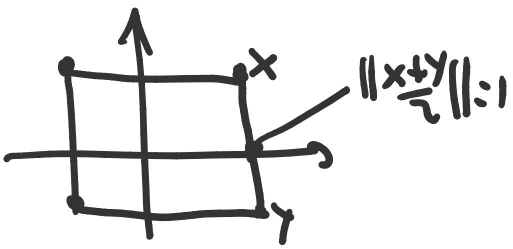
A, B MISURABILI DISGIUNTI

$\|f\| = \|g\| = 1$ $\quad \left\| \frac{f+g}{2} \right\| = 1$.

$\|f - g\| = 2 \geq \varepsilon$

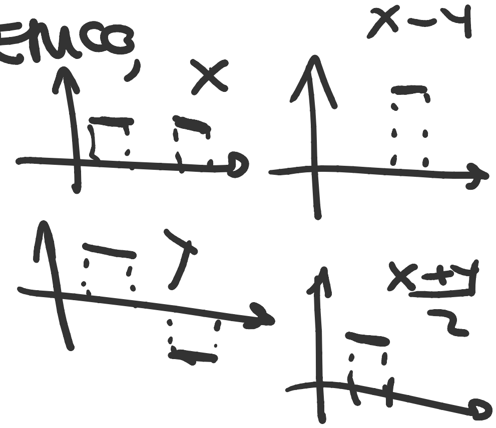
③ L^∞ NON È UNIF. CONVESSO

SU $L^\infty(\mu)$ GENERICO,



$x = \chi_A + \chi_B$

$y = \chi_A - \chi_B$



$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$

$\|x - y\|_\infty = 2$ $\quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1$

SPOILER: $L^p(\mu)$ È UNIFORMEMENTE CONVESSO SE $p \neq 1, +\infty$

$\boxed{\text{OSS}}$ SE X È UNIF. CONVESSO, ALLORA $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$:

$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$

INFATTI, SE $\|y\| \leq 1 - \gamma$ ALLORA $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \frac{\|x\| + \|y\|}{2} \leq 1 - \frac{\gamma}{2} \leq 1 - \delta$

IDEM SE $\|x\| \leq 1 - \gamma$ $\quad (\delta \leq \frac{\gamma}{2})$

SE INVECE $1 - \gamma \leq \|x\|, \|y\| \leq 1$ ALLORA CONSIDERO

2/

SE INVECE $1-\gamma \leq \|x\|, \|y\| \leq 1$, ALLORA CONSIDERO

$$x' = \frac{x}{\|x\|}, \quad y' = \frac{y}{\|y\|} \implies \|x'\| = \|y'\|$$

$$\|x'-y'\| \geq \|x-y\| - \left\|\frac{x}{\|x\|} - x\right\| - \left\|y - \frac{y}{\|y\|}\right\|$$

$$\geq \varepsilon - (1-\|x\|) - (1-\|y\|)$$

$$\geq \varepsilon - 2\gamma = \varepsilon'$$

$$\overset{\text{(DEF.)}}{\implies} \left\|\frac{x'+y'}{2}\right\| \leq 1-\delta'$$

$$\implies \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \left\|\frac{x'+y'}{2}\right\| + \frac{\|x-x'\|}{2} + \frac{\|y-y'\|}{2} \leq 1-\delta'+\gamma$$

$$\leq 1-\delta.$$