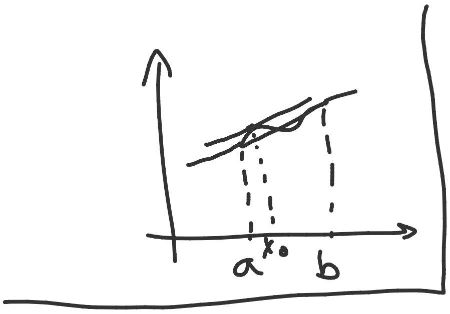


INTEGRALI INDEFINITI

PROBLEMA: DATA $f(x)$, TROVARE $F(x)$ CHE VERIFICA $F'(x)=f(x)$

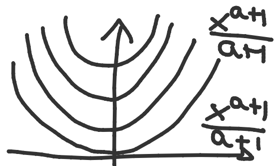
SE $F'(x)=f(x)$, $F(x)$ SI CHIAMA <u>PRIMITIVA</u> DI $f(x)$

QUANTE SONO LE PRIMITIVE DI UNA DATA $f(x)$? SE $F(x)$ E $G(x)$ SONO DUE PRIMITIVE, $F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0 \ \forall x \Rightarrow F(x)-G(x)=$ COSTANTE

$\Rightarrow$ LE PRIMITIVE DI $f(x)$ SONO INFINITE, OTTENUTE AGGIUNGENDO COSTANTI A UNA PRIMITIVA $F(x)$ DATA.

DEFINIZIONE DATA $f(x)$, IL SUO <u>INTEGRALE INDEFINITO</u> È L'INSIEME DELLE PRIMITIVE DI f.

$$\int f(x)dx = \{F(x) : F'(x)=f(x)\}$$



PRIMITIVE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

$(x^a)' = a x^{a-1}$, CAMBIO a CON $a+1$ $\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{\cancel{(a+1)}}{\cancel{a+1}} x^a \Rightarrow \int x^a dx = \left\{\frac{x^{a+1}}{a+1}+c\right\}$ $\forall a \neq -1$

$a=-1$ $(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $(x>0)$ DUE PRIMITIVE DIVERSE?

$(\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ $(x<0)$ $\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \ln(x)+c & (x>0) \\ \ln(-x)+c & (x<0)\end{cases} = \ln|x|+c$

$(e^x)' = e^x \Rightarrow \int e^x dx = \{e^x + c\}$

$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos(x)dx = \{\sin(x)+c\}$

$(-\cos x)' = +\sin x \Rightarrow \int \sin(x)dx = \{-\cos(x)+c\}$

$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \{tg(x)+c\}$

$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}dx = \{arctg(x)+c\}$

$(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \{arcsin(x)+c\}$

$(f(x)^a)' = a f'(x)\, f(x)^{a-1}$ $\left(\frac{f(x)^{a+1}}{a+1}\right)' = f'(x) f(x)^a \Rightarrow \int f'(x) f(x)^a dx = \left\{\frac{f(x)^{a+1}}{a+1}+c\right\}$ $a \neq -1$

$\int \sin^3(x)\cdot\cos(x)dx$ $a=3$ $\Rightarrow \{\sin^4(x) + c\}$

$$\int \sin^3(x)\cdot\cos(x)\,dx \quad \begin{matrix} a=3 \\ f(x)=\sin(x) \end{matrix} \Rightarrow \left\{\frac{\sin^4(x)}{4}+c\right\} \qquad = \left\{\frac{f(x)^{a+1}}{a+1}+c\right\}$$

$a=-1$ $\quad (\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \{\ln|f(x)|+c\}$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \underset{f(x)=\cos x}{=} \{-\ln|\cos x|+c\}$$

INTEGRAZIONE PER LINEARITÀ

REGOLA DI DERIVAZIONE: (a,b COSTANTI)

$$(a\cdot F(x)+b\cdot G(x))' = a\cdot F'(x)+b\cdot G'(x)$$

SE F,G SONO LE PRIMITIVE DI f,g, OTTENGO:

$$\int (a\,f(x)+b\,g(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

ESEMPIO $\displaystyle\int (3e^x-2\cos x)\,dx = 3\int e^x\,dx - 2\int \cos x\,dx = 3e^x - 2\sin(x) + C$ BASTA UNA VOLTA SOLA

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = x - \ln|x+1| + c$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1-\frac{1}{x+1}$$

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

$$\frac{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

IDEA: "SPEZZARE" LA FRAZIONE PER LINEARITÀ E RICONDURCI AI "CASI FORTUNATI"

QUALI SONO I CASI FORTUNATI?

- $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx = \frac{-1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + c$ $\quad (n\geq 2)$ $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + c$ $\quad = x^{-3} \rightarrow \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$ $\qquad \displaystyle\int \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+3}\,dx = \ln(x^4+x^2+3) + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + c$ $\qquad \displaystyle\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+a}{b}\right)\right)' = \frac{\frac{1}{b}}{1+\left(\frac{x+a}{b}\right)^2} = \frac{b}{b^2+(x+a)^2}$

- $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + c$ $\qquad \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+a}{b}\right)\right)' = \frac{\frac{1}{b}}{1+\left(\frac{x+a}{b}\right)^2} = \frac{b}{b^2+(x+a)^2}$

- $\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+a}{b}\right)$

- $\int (a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots) \, dx = \frac{a_m}{m+1} x^{m+1} + \frac{a_{m-1}}{m} x^m + \dots + c$ (POLINOMIO)

PRIMO PASSO: SE GRADO $f \geq$ GRADO g, FACCIO DIVISIONE TRA POLINOMI:

SCRIVO $\underline{f(x) = P(x) g(x) + q(x)}$ CON P, q POLINOMI DA TROVARE,

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int P(x) dx + \int \frac{q(x)}{g(x)} dx$$

GRADO $P \overset{(*)}{=}$ GRADO f - GRADO g

GRADO $q \underset{(**)}{<}$ GRADO g

ESEMPIO $\int \frac{x}{x+1} dx$ $\quad f(x) = x$, $g(x) = x+1$

CERCO P, q

(*) VUOL DIRE P COSTANTE

(**) GRADO $q = 0 \Rightarrow$ ANCHE q COSTANTE

P, q SONO COSTANTI TALI CHE

$$x = P \cdot (x+1) + q = P \cdot x + (P+q)$$

DEVONO AVERE STESSI COEFFICIENTI

$$\begin{cases} P = 1 \\ P + q = 0 \to q = -P = -1 \end{cases} \Rightarrow x = (x+1) - 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x+1} = \int \underbrace{\frac{x+1}{x+1}}_{=1} - \int \frac{1}{x+1} = x - \ln|x+1| + c$$

ESEMPIO $\int \frac{x^3}{x^2+4} dx$, $\quad x^3 = P(x)(x^2+4) + q(x)$ $\quad$ GRADO $P = 1$, GRADO $q = 1$

$$x^3 = (ax+b)(x^2+4) + (cx+d) \quad \text{CERCO } a, b, c, d \text{ COSTANTI}$$

$$= \underline{ax^3 + 4ax + bx^2 + 4b + cx + d}$$

I COEFFICIENTI DEVONO ESSERE UGUALI

COEFF. $1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$

$$\begin{cases} 1 = a \; \checkmark \\ 0 = b \; \checkmark \\ 0 = 4a + c \to c = -4a = -4 \\ 0 = 4b + d \to d = -4b = 0 \end{cases}$$

$$x^3 = x(x^2+4) - 4x \Rightarrow \int \frac{x^3}{x^2+4} dx = \int \left(x - \frac{4x}{x^2+4}\right) dx = \underbrace{\int x \, dx}_{\frac{x^2}{2} + c} - \int \frac{4x}{x^2+4} dx$$

$$\int \frac{4x}{x^2+4} dx = 2 \int \frac{\overbrace{2x}^{g'(x)}}{x^2+4} dx = 2 \ln(x^2+4)$$

$$\frac{x^2}{2}+c$$

$$\int \frac{4x}{x^2+4}\,dx = 2\int \frac{\overbrace{2x}}{\underbrace{x^2+4}_{g(x)}}\,dx = 2\ln(x^2+4)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3}{x^2+4}\,dx = \boxed{\frac{x^2}{2} - 2\ln(x^2+4) + c}$$

CI SIAMO RICONDOTTI AL CASO GRADO f < GRADO g.