Nome:	Cognome:	Matricola:

In caso di esito positivo, vorrei svolgere l'orale $\boxed{\text{mercoledì 4}}$ oppure $\boxed{\text{giovedì 19}}$ febbraio (barrare una sola casella)

Esame di Analisi I - 02/02/2026 *

Esercizio 1 (5 punti) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la formula

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+a)(k+a+1)} = \frac{n}{(a+1)n+(a+1)^2}. \qquad (a = 1, 2, 3, 4)$$

Soluzione: Per $n = 1$ vale la formula perché $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(k+a)(k+a+1)} = \frac{1}{(a+1)(a+2)} = \frac{1}{a+1+(a+1)^2}$; supponendo poi che sia vera per n, varrà anche per $n+1$ perché

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+a)(k+a+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+a)(k+a+1)} + \frac{1}{(n+a+1)(n+a+2)} \\
&= \frac{n}{(a+1)n+(a+1)^2} + \frac{1}{(n+a+1)(n+a+2)} \\
&= \frac{n(n+a+2)+a+1}{(a+1)(n+a+1)(n+a+2)} \\
&= \frac{n+1}{(a+1)(n+a+2)}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (5 punti) Trovare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ e^{\frac{2n-a}{2n+a}} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad (a = 3, 5, 7, 9)$$

stabilendo se si tratta, rispettivamente, di massimo e/o di minimo.

Soluzione: Scrivendo $\frac{2n-a}{2n+a} = 1 - \frac{2a}{2n+a}$ otteniamo che $e^{\frac{2n-a}{2n+a}}$ è crescente, e minore di e, per $n \geq -\frac{a-1}{2}$, mentre è crescente e maggiore di e per $n \leq -\frac{a+1}{2}$, dunque $\inf A = \min A = e^{-2a+1}$ e $\sup A = \max A = e^{2a+1}$.

---

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(|a|n)}{\log(n+a)}\right)^{\log\left(n^2+a\right)}. \qquad (a=\pm 2,\pm 3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\log(|a|n)}{\log(n+a)}\right)^{\log\left(n^2+a\right)} &= \left(\frac{\log(n+a)+\log\left(|a|-\frac{a|a|}{n+a}\right)}{\log(n+a)}\right)^{2\log n+\log\left(1+\frac{1}{an^2}\right)} \\
&= \left(\left(1+\frac{\log\left(|a|-\frac{a|a|}{n+a}\right)}{\log(n+a)}\right)^{\frac{\log(n+a)}{\log\left(|a|-\frac{a|a|}{n+a}\right)}}\right)^{\frac{\log\left(|a|-\frac{a|a|}{n+a}\right)}{\log(n+a)}\left(2\log n+\log\left(1+\frac{1}{an^2}\right)\right)} \\
&\underset{n\to\infty}{\to} e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(|a|-\frac{a|a|}{n+a}\right)}{\log(n+a)}\left(2\log n+\log\left(1+\frac{1}{an^2}\right)\right)} \\
&= e^{2\log|a|} \\
&= a^2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}e^{ax}, \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per ogni valore reale, cioè il suo dominio è

$$(-\infty, \infty).$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Il segno della funzione è lo stesso della radice cubica, cioè

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad &\iff \quad x > 1 \\ f(x) = 0 \quad &\iff \quad x = 1 \\ f(x) < 0 \quad &\iff \quad x < 1, \end{aligned}$$

e in particolare in grafico di f interseca l'asse orizzontale in $(1, 0)$; calcolando inoltre $f(0) = -1$ si ottiene che l'intersezione con l'asse verticale è in $(0, -1)$.

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

dunque $y = 0$ è un asintoto orizzontale, e non ci sono altri asintoti perché $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x) = \dfrac{1 + 3a(x-1)}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}e^{ax}$ si ottiene che

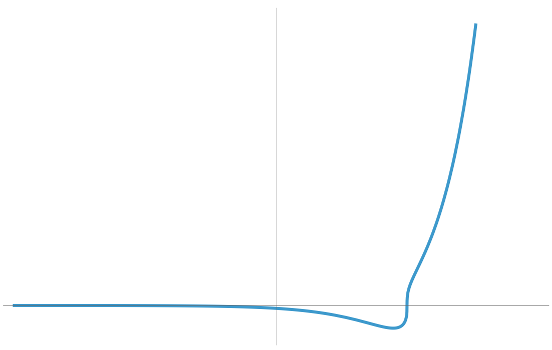
$$\begin{aligned} f(x) \quad &\text{è crescente se} \quad x > \frac{3a-1}{3a} \\ f(x) \quad &\text{è decrescente se} \quad x < \frac{3a-1}{3a} \\ f(x) \quad &\text{ha un minimo in} \quad x = \frac{3a-1}{3a}. \end{aligned}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = \dfrac{9a^2x^2 + 6a(1-3a)x + 9a^2 - 6a + 2}{(x-1)^{\frac{5}{3}}}e^{ax}$ si ottiene che

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\text{è convessa se} \quad \frac{3a-1-\sqrt{3}}{3a} < x < 1, x > \frac{3a-1+\sqrt{3}}{3a} \\ f(x) \quad &\text{è concava se} \quad x < \frac{3a-1-\sqrt{3}}{3a}, 1 < x < \frac{3a-1+\sqrt{3}}{3a} \\ f(x) \quad &\text{ha un flesso in} \quad x = \frac{3a-1-\sqrt{3}}{3a}, \frac{3a-1+\sqrt{3}}{3a}. \end{aligned}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 5 (5 punti) Calcolare la primitiva

$$\int \sin\left(\sqrt{x+a}\right)\cos\left(\sqrt{x+a}\right)\mathrm{d}x. \qquad (a=\pm 1, \pm 2)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int \sin\left(\sqrt{x+a}\right)\cos\left(\sqrt{x+a}\right)\mathrm{d}x &\overset{(y=\sqrt{x+a})}{=} \int 2y\sin(y)\cos(y)\mathrm{d}y \\
&= \int y\sin(2y)\mathrm{d}y \\
&= y\frac{-\cos(2y)}{2} - \int \frac{-\cos(2y)}{2}\mathrm{d}y \\
&= -\frac{y\cos(2y)}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2y)\mathrm{d}y \\
&= -\frac{y\cos(2y)}{2} + \frac{\sin(2y)}{4} + c \\
&= -\frac{\sqrt{x+a}\cos\left(2\sqrt{x+a}\right)}{2} + \frac{\sin\left(2\sqrt{x+a}\right)}{4} + c.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (6 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t)\log(1+t))^2 \\ x(0) = a \end{cases}. \qquad (a=2,3,4,5)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\frac{x'(t)}{x(t)^2} &= \log^2(1+t) \\
&\Rightarrow \\
\frac{1}{a} - \frac{1}{x(t)} &= \int_a^{x(t)} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \frac{x'(t)}{x(t)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^t \log^2(1+s)\mathrm{d}s \\
&= \Big[(1+s)\log(1+s)^2 - 2(1+s)\log(1+s) + 2s\Big]_0^t \\
&= (1+t)\log(1+t)^2 - 2(1+t)\log(1+t) + 2t \\
&\Rightarrow \\
x(t) &= \frac{a}{1 - a\left((1+t)\log(1+t)^2 - 2(1+t)\log(1+t) + 2t\right)}
\end{aligned}$$