Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/02/2026 *

Esercizio 1 (5 punti) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la formula

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 + ak - a - 2}{k!} = -\frac{n + a + 2}{n!}. \qquad (a = -1, 0, 1, 2)$$

Soluzione: Per $n = 1$ vale la formula perché $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \frac{k^2 + ak - a - 2}{k!} = -a - 2 - 1 = -\frac{1 + a + 2}{1!}$; supponendo poi che sia vera per n, varrà anche per $n + 1$ perché

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k^2 + ak - a - 2}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 + ak - a - 2}{k!} + \frac{(n+1)^2 + a(n+1) - a - 2}{(n+1)!} \\
&= -\frac{n + a + 2}{n!} + \frac{(n+1)^2 + a(n+1) - a - 2}{(n+1)!} \\
&= -\frac{(n + a + 2)(n+1) - (n+1)^2 - a(n+1) + a + 2}{(n+1)!} \\
&= -\frac{n + a + 3}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (5 punti) Trovare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{x - x^2 \middle| -a < x < a + 1\right\} \cup \left\{\frac{n+1}{n+b} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad (a = 1, 2, b = 2, 3)$$

stabilendo se si tratta, rispettivamente, di massimo e/o di minimo.

Soluzione: La successione $\dfrac{n+1}{n+b} = 1 - \dfrac{b-1}{n+1}$ cresce, avendo come valore minimo $\dfrac{2}{b+1}$ e come estremo superiore non raggiunto 1, mentre possiamo riscrivere $\left\{x - x^2 \middle| -a < x < a + 1\right\} = \left\{\dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \middle| -a < x < a + 1\right\} = \left(-a(1+a), \dfrac{1}{4}\right]$, dunque $\inf A = -a(1+a)$, $\sup A = 1$ e non c'è né massimo né minimo.

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to e} \frac{\log(\log x)}{\tan\left(\frac{a\pi x}{e}\right)}. \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione:

$$\frac{\log(\log x)}{\tan\left(\frac{a\pi x}{e}\right)} = \frac{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)}{\tan\left(a\pi\left(\frac{x}{e}-1\right)\right)} = \frac{\frac{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)}{\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}\frac{\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}}}{\frac{\tan\left(a\pi\left(\frac{x-e}{e}\right)\right)}{a\pi\left(\frac{x-e}{e}\right)}}\frac{\frac{x-e}{e}}{a\pi\frac{x-e}{e}} \underset{x\to e}{\to} \frac{1}{a\pi}.$$

Esercizio 4 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = e^{\frac{2ax}{\sqrt{a^2x^2-3}}} - 1, \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita quando l'argomento della radice è positivo o nullo e il denominatore non si annulla, cioè

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{a}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{a}, +\infty\right).$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Essendo la funzione esponenziale crescente, otteniamo

$$f(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \frac{\sqrt{3}}{a},$$
$$f(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < -\frac{\sqrt{3}}{a},$$

e in particolare in grafico di f non interseca l'asse orizzontale in e, poiché la funzione non è definita in 0, non interseca neanche l'asse verticale.

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x\to -\frac{\sqrt{3}}{a}^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{a}^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{\pm 2} - 1,$$

dunque $x = \dfrac{\sqrt{3}}{a}$ è un asintoto verticale e $y = e^{\pm 2} - 1$ sono asintoti orizzontali.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Poiché $f'(x) = -6a\dfrac{e^{\frac{2ax}{\sqrt{a^2x^2-3}}}}{(a^2x^2-3)^{\frac{3}{2}}}$ è sempre negativa, deduciamo che

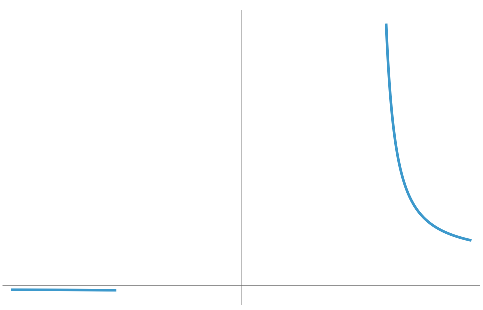
$$f(x) \quad \text{è decrescente se} \quad x < -\frac{\sqrt{3}}{a}, x > \frac{\sqrt{3}}{a}$$
$$f(x) \quad \text{NON ha massimi né minimi.}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = 18a^2 e^{\frac{2ax}{\sqrt{a^2x^2-3}}} \dfrac{2 + ax\sqrt{a^2x^2-3}}{(a^2x^2-3)^3}$ si ottiene che

$$f(x) \quad \text{è convessa se} \quad -\frac{2}{a} < x < -\frac{\sqrt{3}}{a}, x > \frac{\sqrt{3}}{a}$$
$$f(x) \quad \text{è concava se} \quad x < -\frac{2}{a}$$
$$f(x) \quad \text{ha un flesso in} \quad x = -\frac{2}{a}.$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 5 (5 punti) Calcolare la primitiva

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}-x}\mathrm{d}x \qquad (a=2,3,5,6).$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}-x}\mathrm{d}x \\
\overset{\left(y=\operatorname{arcsinh}\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{=} & \int \frac{a\sinh^2 y}{\sqrt{a}\cosh y-\sqrt{a}\sinh y}\sqrt{a}\cosh y\mathrm{d}y \\
= & \int \frac{a}{8}\left(e^{4y}-e^{2y}+e^{-2y}-1\right)\mathrm{d}y \\
= & a\left(\frac{e^{4y}}{32}-\frac{e^{2y}}{16}-\frac{e^{-2y}}{16}-\frac{y}{8}\right)+c \\
= & a\left(\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{x^2}{a}+1}\right)^4}{32}-\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{x^2}{a}+1}\right)^2}{16}-\frac{1}{16\left(\frac{x}{\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{x^2}{a}+1}\right)^2}-\frac{\log\left(\frac{x}{\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{x^2}{a}+1}\right)}{8}\right)+c.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (6 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t)=a\dfrac{\cosh x(t)}{t^2+3t+2} \\ x(0)=0 \end{cases}. \qquad (a=\pm 2,\pm 3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\frac{x'(t)}{\cosh x(t))} &= \frac{1}{t^2+3t+2} \\
&\Rightarrow \\
\frac{1}{a}\left(2\arctan\left(e^{x(t)}\right)-\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{x(t)} a\frac{1}{\cosh x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \frac{x'(s)}{\cosh x(s)}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \frac{1}{s^2+3s+2}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)\mathrm{d}s \\
&= [\log|s+1|-\log|s+2|]_0^t \\
&= \log\frac{2t+2}{t+2} \\
&\Rightarrow \\
x(t) &= \log\tan\left(\frac{a}{2}\log\left(\frac{2t+2}{t+2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$