Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/06/2026 *

Esercizio 1 (5 punti) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la formula

$$(n+a)! > (a+2)^{n-1}. \qquad (a = 1, 2, 3, 4)$$

Soluzione: Per $n = 1$ vale la formula perché $(1 + a)! > 1 = (a + 2)^0$; supponendo poi che sia vera per n, varrà anche per $n + 1$ perché

$$(n+1+a)! = (n+1+a)(n+a)! > (n+1+a)(a+2)^{n-1} \geq (a+2)(a+2)^{n-1} = (a+2)^n.$$

Esercizio 2 (5 punti) Trovare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ \frac{(-1)^n}{|n-2a|+1} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

stabilendo se si tratta, rispettivamente, di massimo e/o di minimo.

Soluzione: Scrivendo $A = \left\{ \frac{1}{2|n-a|+1} \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{|2n-1-2a|+1} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$, è sufficiente trovare l'estremo superiore del primo insieme e l'estremo inferiore del secondo: il primo si otterrà prendendo $n = a$ e cioè $\sup A = \max A = 1$, mentre il secondo si otterrà con $n = a \pm 1$ e cioè $\inf A = \min A = -\frac{1}{2}$.

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{n+a} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}. \qquad (a = \pm 1, \pm 2)$$

Soluzione: Poiché $\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{e}{3} < 1$, allora $\left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, dunque

$$\sqrt[n]{3^{n+a} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = 3\sqrt[n]{3^a + \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 3\left(3^a+0\right)^0 \to 3.$$

Esercizio 4 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{ax} - 2\right), \qquad (a = 2, 3, 5, 6)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: Poiché l'argomento della radice quadrata dev'essere positivo, il dominio della funzione è

$$[0, \infty).$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Il segno della funzione è lo stesso dell'argomento dell'arcotangente, cioè

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad &\iff \quad x > \frac{4}{a} \\ f(x) = 0 \quad &\iff \quad x = \frac{4}{a} \\ f(x) < 0 \quad &\iff \quad 0 \le x < \frac{4}{a}, \end{aligned}$$

e in particolare in grafico di f interseca l'asse orizzontale in $\left(\frac{4}{a}, 0\right)$; calcolando inoltre $f(0) = -\arctan 2$ si ottiene che l'intersezione con l'asse verticale è in $(0, -\arctan 2)$.

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\arctan 2, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

dunque $y = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale, unico asintoto.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x) = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}\left(1 + (\sqrt{ax} - 2)^2\right)}$ si ottiene che

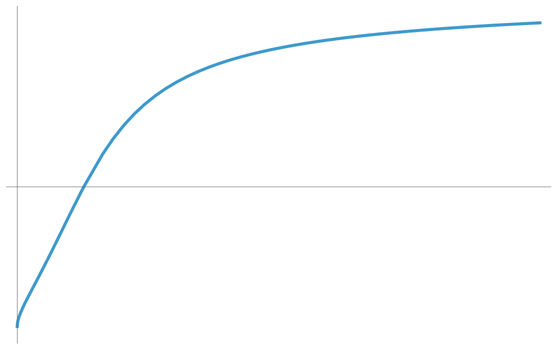
$$\begin{array}{ccc} f(x) & \text{è crescente se} & x \ge 0 \\ f(x) & \text{non ha ha massimi né minimi} & . \end{array}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = \dfrac{\sqrt{a}\,(8\sqrt{ax} - 3ax - 5)}{4\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}\left(1 + (\sqrt{ax} - 2)^2\right)}$ si ottiene che

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \text{è convessa se} & \frac{1}{a} < x < \frac{25}{9a} \\ f(x) & \text{è concava se} & 0 \le x < \frac{1}{a}, x > \frac{25}{9a} \\ f(x) & \text{ha un flesso in} & x = \frac{1}{a}, \frac{25}{9a}. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 5 (5 punti) Calcolare la primitiva

$$\int \sqrt[3]{1+\sqrt{x+a}}\mathrm{d}x. \qquad (a=\pm 1, \pm 2)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{1+\sqrt{x+a}}\mathrm{d}x \quad & \overset{\left(y=\sqrt[3]{1+\sqrt{x+a}}\right)}{=} \quad \int y 6y^2\left(y^3-1\right)\mathrm{d}y \\
&= \quad \int \left(6y^6-6y^3\right)\mathrm{d}y \\
&= \quad \frac{6}{7}y^7-\frac{3}{2}y^4+c \\
&= \quad \frac{6}{7}\left(1+\sqrt{x+a}\right)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{x+a}\right)^{\frac{4}{3}}+c.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (6 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x(t)}{t^2+t}+a \\ x(1)=0 \end{cases}. \qquad (a=\pm 2, \pm 3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{\int_1^t \frac{1}{s^2+s}\mathrm{d}s}\int_1^t e^{-\int_1^s \frac{1}{r^2+r}\mathrm{d}s} a\mathrm{d}s \\
&= a e^{\int_1^t\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}s}\int_1^t e^{-\int_1^s\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \\
&= a e^{\log t-\log(t+1)+2}\int_1^t e^{-\log s+\log(s+1)-2}\mathrm{d}t \\
&= a\frac{2t}{t+1}\int_1^t \frac{s+1}{2s}\mathrm{d}s \\
&= a\frac{2t}{t+1}\int_1^t \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}\right)\mathrm{d}s \\
&= a\frac{2t}{t+1}\left(\frac{t-1}{2}+\frac{\log t}{2}\right) \\
&= a\frac{t(t-1+\log t)}{t+1}
\end{aligned}$$