

Nome:	Cognome:	Matricola:
-------	----------	------------

Esame di Analisi I - 06/07/2026 *

Esercizio 1 (5 punti) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la formula

$$n^3 - 3n^2 + (3+a)n - a > 0. \quad (a = 1, 2, 3, 4)$$

Soluzione: Per $n = 1$ vale la formula perché $1^3 - 3 \cdot 1^2 + (3+a) \cdot 1 - a = 1 > 0$; supponendo poi che sia vera per n , varrà anche per $n+1$ perché

$$\begin{aligned}
 & (n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (3+a)(n+1) - a \\
 = & n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3(n^2 + 2n + 1) + (3+a)(n+1) - a \\
 > & 3n^2 - (3+a)n + a + 3n^2 + 3n + 1 - 3(n^2 + 2n + 1) + (3+a)(n+1) - a \\
 = & 3n^2 - 3n + a + 1 \\
 > & 0.
 \end{aligned}$$

Esercizio 2 (5 punti) Trovare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{an}{an+b}\frac{\pi}{2}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad (a = 3, 5, b = 2, 4)$$

stabilendo se si tratta, rispettivamente, di massimo e/o di minimo.

Soluzione: Scrivendo $A = \left\{ \sin\left(\frac{a(4n-3)}{a(4n-3)+b}\frac{\pi}{2}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -\sin\left(\frac{a(4n-1)}{a(4n-1)+b}\frac{\pi}{2}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$, è sufficiente trovare

l'estremo superiore del primo insieme e l'estremo inferiore del secondo: le due successioni $\frac{a(4n-3)}{a(4n-3)+b}\frac{\pi}{2}$ e

$\frac{a(4n-1)}{a(4n-1)+b}\frac{\pi}{2}$ si avvicinano entrambe ad $\frac{\pi}{2}$ crescendo, dunque i rispettivi seni si avvicineranno crescendo a 1 e quindi $\inf A = -1$, $\sup A = 1$ e non c'è né massimo né minimo.

*ISTRUZIONI:

Scrivere nome, cognome e numero di matricola.

Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.

Non usare libri, appunti né calcolatrici.

Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3^{x+1} - 2^{ax+1})^{\frac{1}{x}}. \quad (a = \pm 1, \pm 2)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} (3^{x+1} - 2^{ax+1})^{\frac{1}{x}} &= \left((1 + (3^{x+1} - 2^{ax+1} - 1))^{\frac{1}{3^{x+1} - 2^{ax+1} - 1}} \right)^{\frac{3^{x+1} - 2^{ax+1} - 1}{x}} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 2^{ax+1} - 1}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (3^{\frac{3^x - 1}{x}} - 2^{\frac{2^{ax} - 1}{x}})} \\ &= e^{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} - 2a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{ax} - 1}{ax}} \\ &= e^{3 \log 3 - 2a \log 2} \\ &= \frac{27}{4^a} \end{aligned}$$

Esercizio 4 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{\sin^2(x+a)}{1+2\sin(x+a)}, \quad (a = \pm 1, \pm 2)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: Restringendoci per periodicità all'intervallo $[-\pi-a, \pi-a)$, la funzione è definita per i valori che non annullano il denominatore, cioè

$$\left[-\pi-a, -\frac{5}{6}\pi-a\right) \cup \left(-\frac{5}{6}\pi-a, -\frac{\pi}{6}-a\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6}-a, \pi-a\right).$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché il numeratore non è mai negativo, il segno sarà lo stesso del denominatore, cioè

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff -\pi-a < x < -\frac{5}{6}\pi-a, -\frac{\pi}{6}-a < x < \pi-a \\ f(x) = 0 &\iff x = -\pi-a, -a \\ f(x) < 0 &\iff -\frac{5}{6}\pi-a < x < -\frac{\pi}{6}-a, \end{aligned}$$

e in particolare in grafico di f interseca l'asse orizzontale in $(-\pi-a, 0), (-a, 0)$; calcolando inoltre $f(0) = \frac{\sin^2 a}{1+2\sin a}$ si ottiene che l'intersezione con l'asse verticale è in $\left(0, \frac{\sin^2 a}{1+2\sin a}\right)$.

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{6}\pi-a^\pm} f(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}-a^\pm} f(x) = \pm\infty,$$

dunque $x = -\frac{5}{6}\pi, x = -\frac{\pi}{6}$ sono asintoti verticali.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x) = \frac{2\sin(x+a)\cos(x+a)(1+\sin(x+a))}{(1+2\sin(x+a))^2}$ si ottiene che

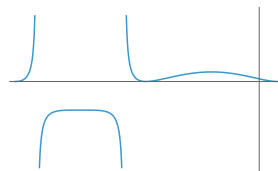
$$\begin{aligned} f(x) &\text{ è crescente se } -\pi-a < x < -\frac{5}{6}\pi-a, -\frac{5}{6}\pi-a < x < -\frac{\pi}{2}-a, -a < x < \pi-a \\ f(x) &\text{ è decrescente se } -\frac{\pi}{2}-a < x < -\frac{\pi}{6}-a, -\frac{\pi}{6}-a < x < -a < \frac{\pi}{2}-a < x < \pi-a \\ f(x) &\text{ ha un massimo in } x = -\frac{\pi}{2}-a, \frac{\pi}{2}-a \\ f(x) &\text{ ha un minimo in } x = -\pi-a, -a. \end{aligned}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = \frac{2(1+\sin(x+a))(1-2\sin(x+a))(1+\sin(x+a)+\sin^2(x+a))}{(1+2\sin(x+a))^2}$ si ottiene che

$$\begin{aligned} f(x) &\text{ è convessa se } -\pi-a < x < -\frac{5}{6}\pi-a, -\frac{\pi}{6}-a < x < \frac{\pi}{6}-a, \frac{5}{6}\pi-a < x < \pi-a \\ f(x) &\text{ è concava se } -\frac{5}{6}\pi-a < x < -\frac{\pi}{6}-a, \frac{\pi}{6}-a < x < \frac{5}{6}\pi-a \\ f(x) &\text{ ha un flesso in } x = \frac{\pi}{6}-a, \frac{5}{6}\pi-a. \end{aligned}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 5 (5 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_{1+a}^{2+a} x \log^2(x-a) dx. \quad (a = \pm 1, \pm 2)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int_{1+a}^{2+a} x \log^2(x-a) dx &\stackrel{(y=x-a)}{=} \int_1^2 (y+a) \log^2 y dy \\ &= \left[\left(\frac{y^2}{2} + ay \right) \log^2 y \right]_1^2 - \int_1^2 (y+2a) \log y dy \\ &= (2+2a) \log^2 2 - \left(\left[\left(\frac{y^2}{2} + 2ay \right) \log y \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{y}{2} + 2a \right) dy \right) \\ &= (2+2a) \log^2 2 - \left((2+4a) \log 2 - \left[\frac{y^2}{4} + 2ay \right]_1^2 \right) \\ &= (2+2a) \log^2 2 - (2+4a) \log 2 + \frac{3}{4} + 2a. \end{aligned}$$

Esercizio 6 (6 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \tan(at) + b \cos^2(at) \\ x(0) = b \end{cases} \quad . \quad (a = 2, 3, b = \pm 1)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int_0^t a \tan(as) ds} \left(b + \int_0^t e^{-\int_0^s a \tan(ar) dr} \cos^2(as) ds \right) \\ &= e^{[-\log |\cos(as)|]_0^t} \left(b + b \int_0^t e^{[\log |\cos(as)|]_0^s} \cos^2(as) ds \right) \\ &= b e^{-\log \cos(at)} \left(1 + \int_0^t e^{\log \cos(at)} \cos^2(as) ds \right) \\ &= \frac{b}{\cos(at)} \left(1 + \int_0^t \cos^3(at) ds \right) \\ &= \frac{b}{\cos(at)} \left(1 + \left[\frac{\sin(as)}{a} - \frac{\sin^3(as)}{3a} \right]_0^t \right) \\ &= b \frac{3a + 3 \sin(at) - \sin^3(at)}{3a \cos(at)} \end{aligned}$$