Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - Simulazione *

Esercizio 1 (5 punti) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la formula

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soluzione: Per $n = 1$ la formula vale perché $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Supponendo ora che la formula valga per n, mostriamo che vale anche per $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)\left(2n^2 + n + 6n + 6\right)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Esercizio 2 (5 punti) Trovare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \, 3 < x^2 - 2x \leq 15\right\},$$

stabilendo se si tratta, rispettivamente, di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\sup A = \max A = 5$ segue immediatamente scrivendo l'insieme come

$$A = \{x \in \mathbb{R} | (x+1)(x-3) > 0, \, (x+3)(x-5) \leq 0\} = ((-\infty, -1) \cup (3, +\infty)) \cap [-3, 5] = [-3, 1) \cup (3, 5].$$

$\inf A = \min A = -3$ segue ragionando allo stesso modo.

---

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 2\sqrt{n}}{n^2 \cos\frac{1}{n} + \sqrt[3]{n}\sin n}.$$

Soluzione: Dividendo numeratore e denominatore per n^2 si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 2\sqrt{n}}{n^2 \cos\frac{1}{n} + \sqrt[3]{n}\sin n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}}{\cos\frac{1}{n} + \frac{\sin n}{n^{\frac{5}{3}}}}.$$

Poiché $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n^{\frac{5}{3}}} = 0$, otterremo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 2\sqrt{n}}{n^2 \cos\frac{1}{n} + \sqrt[3]{n}\sin n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\cos\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{1}{n}} = 1.$$

Esercizio 4 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2} + \cos(2x)},$$

determinandone:

(1 punti) Insieme di definizione;

Soluzione: Poiché il denominatore non si annulla mai, il dominio è

$$(-\infty, +\infty).$$

(1 punti) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché il denominatore è sempre positivo, il segno sarà lo stesso del numeratore, e cioè, restringendoci per periodicità all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ f(x) = 0 &\iff x = -\frac{\pi}{2}, 0 \\ f(x) < 0 &\iff x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

essendo $f(0) = 0$, le intersezioni con gli assi saranno $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(0, 0)$.

(1 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Poiché, per periodicità, non esiste il limite $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, allora f NON ha asintoti.

(1 punti) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Dallo studio del segno di $f'(x) = \frac{2\left(1 + \sqrt{2}\cos(2x)\right)}{\left(\sqrt{2} + \cos(2x)\right)^2}$ otteniamo che

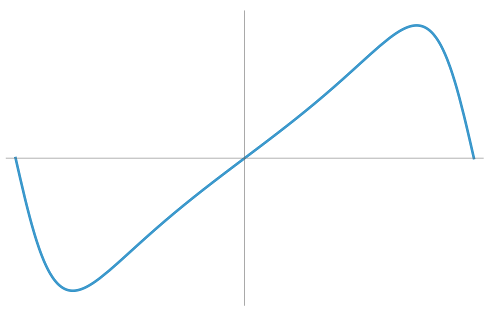
$$\begin{aligned} &f(x) \quad \text{è crescente se} \quad x \in \left(-\frac{3}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi\right) \\ &f(x) \quad \text{è decrescente se} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{8}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{8}\pi, \frac{\pi}{2}\right) \\ &f(x) \quad \text{ha un massimo in} \quad x = \frac{3}{8}\pi \\ &f(x) \quad \text{ha un minimo in} \quad x = -\frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

(1 punti) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Dallo studio del segno di $f''(x) = \frac{2\sqrt{2}\sin(2x)\cos(2x)}{\left(\sqrt{2} + \cos(2x)\right)^3}$ otteniamo che

$$\begin{aligned} &f(x) \quad \text{è convessa se} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ &f(x) \quad \text{è concava se} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \\ &f(x) \quad \text{ha un flesso in} \quad -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(1 punti) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 5 (5 punti) Calcolare la primitiva

$$\int \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}+2}\mathrm{d}x.$$

Soluzione:

$$\int \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}+2}\mathrm{d}x \overset{(y=e^{2x})}{=} \int \frac{1}{y+\frac{1}{y}+2}\frac{1}{2y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(y+1)^2}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2(y+1)}+c = -\frac{1}{2(e^{2x}+1)}+c.$$

Esercizio 6 (6 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2t^3 x(t) + 3t^7 \\ x(0) = -1 \end{cases}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2\int_0^t s^3 \mathrm{d}s}\left(-1+\int_0^t e^{-\int_0^s 2r^3\mathrm{d}r} 3s^7 \mathrm{d}s\right) \\ &= e^{\frac{t^4}{2}}\left(-1+3\int_0^t e^{-\frac{s^4}{2}} s^7 \mathrm{d}s\right) \\ &= e^{\frac{t^4}{2}}\left(-1+3\left(-\frac{t^4}{2}e^{\frac{t^4}{2}} - e^{\frac{t^4}{2}}+1\right)\right) \\ &= 2e^{\frac{t^4}{2}} - \frac{3}{2}t^4 - 3. \end{aligned}$$