Nome:	Cognome:	Matricola:

Esonero di Analisi I - 14/11/2025 *

Esercizio 1 (8 punti) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la formula

$$\sum_{k=1}^{n} k a^k = a^{n+1}\frac{(a-1)n-1}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)^2}. \qquad (a = \pm 2, \pm 3)$$

Soluzione: Per $n = 1$ vale la formula perché $\sum_{k=1}^{1} k a^k = a = a^2\frac{a-2}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)^2}$; supponendo poi che sia vera per n, varrà anche per $n+1$ perché

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k a^k &= \sum_{k=1}^{n} k a^k + (n+1)a^{n+1} \\
&= a^{n+1}\frac{(a-1)n-1}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)^2} + (n+1)a^{n+1} \\
&= a^{n+1}\frac{(a-1)n-1+(n+1)(a-1)^2}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)^2} \\
&= a^{n+1}\frac{a(a-1)n+a^2-2a}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)^2} \\
&= a^{n+2}\frac{(a-1)(n+1)-1}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)^2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti) Trovare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ \arctan\left(n^2 - 2an + a^2 + 1\right) \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

stabilendo se si tratta, rispettivamente, di massimo e/o di minimo.

Soluzione: Poiché $n^2 - 2an + a^2 + 1 = (n-a)^2 + 1 \geq 1$, allora $\arctan\left(n^2 - 2an + a^2 + 1\right) \geq \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque $\inf A = \min A = \frac{\pi}{4}$; inoltre, $\arctan\left(n^2 - 2an + a^2 + 1\right) < \frac{\pi}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e poiché $\lim_{n\to+\infty} \arctan\left(n^2 - 2an + a^2 + 1\right) = \frac{\pi}{2}$ allora $\sup A = \frac{\pi}{2}$ e non è un massimo.

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di due ore.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + \frac{a}{\sin\frac{1}{n}}} - \sqrt{n^2 + \frac{1}{\tan\frac{a}{n}}}. \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2 + \frac{a}{\sin\frac{1}{n}}} - \sqrt{n^2 + \frac{1}{\tan\frac{a}{n}}} \quad &= \quad \frac{n^2 + \frac{a}{\sin\frac{1}{n}} - \left(n^2 + \frac{1}{\tan\frac{a}{n}}\right)}{\sqrt{n^2 + \frac{a}{\sin\frac{1}{n}}} + \sqrt{n^2 + \frac{1}{\tan\frac{a}{n}}}} \\
&= \quad \frac{\frac{a}{n\sin\frac{1}{n}} - \frac{1}{n\tan\frac{a}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n\sin\frac{1}{n}}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n\tan\frac{a}{n}}}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} \quad \frac{a - \frac{1}{a}}{2} \\
&= \quad \frac{a^2-1}{2a}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+a) - \log(x-a)}{\log(x+1) - \log(x-1)}. \qquad (a = \pm 2, \pm 3)$$

Soluzione:

$$\frac{\log(x+a) - \log(x-a)}{\log(x+1) - \log(x-1)} = \frac{\log\frac{x+a}{x-a}}{\log\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\log\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)}{\log\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)} = \frac{\frac{\log\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}{\frac{2a}{x-a}}}{\frac{\log\left(1+\frac{2}{x-1}\right)}{\frac{2}{x-1}}} \frac{a\left(1-\frac{1}{x}\right)}{1-\frac{a}{x}} \underset{x\to+\infty}{\to} a.$$