Nome:	Cognome:	Matricola:

Esonero di Analisi I - Simulazione *

Esercizio 1 (8 punti) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la formula

$$3^{n+2} \geq (n+2)^3.$$

Soluzione: Per $n = 1$ la disuguaglianza è valida perché $3^3 = 3^3 = 27$. Supponendo ora che valga $3^{n+2} \geq (n+2)^3$, dimostriamo che $3^{n+3} \geq (n+3)^3$:

$$3^{n+3} = 3 \cdot 3^{n+2} \geq 3(n+2)^3 \geq (n+2)^3 + 3(n+2)^2 + 3(n+2) \geq (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = (n+3)^3.$$

Esercizio 2 (8 punti) Trovare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2+2} \middle| n \in \mathbb{N} \right\},$$

stabilendo se si tratta, rispettivamente, di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\inf A = \min A = -\frac{1}{3}$ perché, scrivendo $A = A_+ \cup A_-$ con

$$A_+ := \left\{ \frac{1}{4n^2+2} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A_- := \left\{ -\frac{1}{(2n-1)^2+2} \middle| n \in \mathbb{N} \right\},$$

avremo $x > 0$ e $y \geq -\frac{1}{3} \in A_-$ per ogni $x \in A_+, y \in A_-$.

$\max A = \sup A = \frac{1}{6}$ perché $x \leq \frac{1}{6} \in A_+$ e $y < 0$ per ogni $x \in A_+, y \in A_-$.

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di due ore.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(3n^5+2\right)}{\log\left(2n^4-n\right)}$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(3n^5+2\right)}{\log\left(2n^4-n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5\log n+\log\left(3+\frac{2}{n^5}\right)}{4\log n+\log\left(2-\frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{\log\left(3+\frac{2}{n^5}\right)}{\log n}}{4+\frac{\log\left(2-\frac{1}{n^3}\right)}{\log n}} = \frac{5}{4}.$$

Esercizio 4 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^x-1}{(2x)^{2x}-1}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} \frac{x^x-1}{(2x)^{2x}-1} &= \lim_{x\to0^+} \frac{e^{x\log x}-1}{e^{2x\log(2x)}-1} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{e^{x\log x}-1}{x\log x}}{\frac{e^{2x\log(2x)}-1}{2x\log(2x)}} \frac{x\log x}{2x\log(2x)} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{x\log x}{2x\log(2x)} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{2(\log 2+\log x)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$