Nome:	Cognome:	Matricola:

Esonero di Analisi I - 16/01/2026 *

Esercizio 1 (12 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \log^3(x+a) - 4\log^2(x+a), \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

determinandone:

(2 punti) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è positivo, cioè $(-a, +\infty)$.

(2 punti) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Scrivendo $f(x) = \log^2(x+a)(\log(x+a) - 4)$ si ottiene che

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -a < x < 1-a, 1-a < x < e^4 - a \\ f(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = 1-a, e^4 - a \\ f(x) < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x > e^4 - a, \end{aligned}$$

e in particolare il grafico di f interseca l'asse orizzontale in $(1-a, 0)$, $\big(e^4 - a, 0\big)$; calcolando inoltre $f(0) = \log^3 a - 4\log^2 a$ otteniamo che l'intersezione con l'asse verticale è in $\big(0, \log^3 a - 4\log^2 a\big)$.

(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x \to -a^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

dunque $x = a$ è un asintoto verticale mentre, essendo $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, non ci sono asintoti obliqui.

(2 punti) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

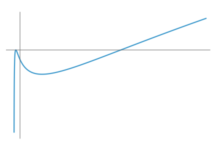
Soluzione: Studiando il segno di $f'(x) = \dfrac{3\log^2(x+a) - 8\log(x+a)}{x+a}$ si ottiene che

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente se} & -a < x < 1-a, x > e^{\frac{8}{3}} - a, \\ f(x) & \text{è decrescente se} & 1-a < x < e^{\frac{8}{3}} - a, \\ f(x) & \text{ha un massimo in} & x = 1-a \\ f(x) & \text{ha un minimo in} & x = e^{\frac{8}{3}} - a. \end{array}$$

(2 punti) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = \dfrac{14\log(x+a) - 3\log^2(x+a) - 8}{(x+a)^2}$ si ottiene che $f(x)$ è convessa se $e^{\frac{2}{3}} - a < x < e^4 - a$, concava se $-a < x < e^{\frac{2}{3}} - a, x > e^4 - a$ e ha un flesso in $x = e^{\frac{2}{3}} - a, e^4 - a$.

(2 punti) Grafico qualitativo.



Soluzione:

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di due ore.

Esercizio 2 (6 punti) Calcolare la primitiva

$$\int \frac{\arctan\left(\sqrt{a}x\right)}{ax^4+x^2}\mathrm{d}x \qquad (a=2,3,5,6).$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan\left(\sqrt{a}x\right)}{ax^4+x^2}\mathrm{d}x &= \int \arctan\left(\sqrt{a}x\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{a}{1+ax^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \arctan\left(\sqrt{a}x\right)\left(-\frac{1}{x}-\sqrt{a}\arctan\left(\sqrt{a}x\right)\right)-\int \frac{\sqrt{a}}{1+ax^2}\left(-\frac{1}{x}-\sqrt{a}\arctan\left(\sqrt{a}x\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\arctan\left(\sqrt{a}x\right)}{x}-\sqrt{a}\arctan^2\left(\sqrt{a}x\right)+\sqrt{a}\int\frac{1}{x\left(1+ax^2\right)}\mathrm{d}x+a\int\frac{\arctan\left(\sqrt{a}x\right)}{1+ax^2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\arctan\left(\sqrt{a}x\right)}{x}-\sqrt{a}\arctan^2\left(\sqrt{a}x\right)+\sqrt{a}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{\pi x}{1+ax^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{\sqrt{a}}{2}\arctan^2\left(\sqrt{a}x\right) \\
&= -\frac{\arctan\left(\sqrt{a}x\right)}{x}-\frac{\sqrt{a}}{2}\arctan^2\left(\sqrt{a}x\right)+\sqrt{a}\log|x|-\frac{\sqrt{a}}{2}\log\left(1+ax^2\right)+c.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (6 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{2}{a}\pi}|\sin(ax)|^5\mathrm{d}x \qquad (a=3,5,7,9).$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2}{a}\pi}|\sin(ax)|^5\mathrm{d}x &\overset{(y=ax)}{=} \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}|\sin y|^5\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{a}\left(\int_0^{\pi}\sin^5 y\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\sin^5 y\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2 y\right)^2\sin y\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\left(1-\cos^2 y\right)^2\sin y\mathrm{d}y\right) \\
&\overset{(z=\cos y)}{=} \frac{1}{a}\left(-\int_1^{-1}\left(1-z^2\right)^2\mathrm{d}z+\int_{-1}^{1}\left(1-z^2\right)^2\mathrm{d}z\right) \\
&= \frac{2}{a}\int_1^{-1}\left(1-2z^2+z^4\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{2}{a}\left[z-\frac{2}{3}z^3+\frac{z^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{32}{15a}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t)=te^{a(x(t)+t)} \\ x(0)=0 \end{cases}. \qquad (a=\pm 2,\pm 3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\frac{x't}{e^{ax(t)}} &= te^{at} \\
&\Rightarrow \\
\frac{1-e^{-ax(t)}}{a} &= \int_0^{x(t)}e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t\frac{x'(s)}{e^{ax(s)}}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t se^{as}\mathrm{d}s \\
&= \left[\frac{e^{as}(as-1)}{a^2}\right]_0^t \\
&= \frac{e^{at}(at-1)+1}{a^2} \\
&\Rightarrow \\
x(t) &= -\frac{\log\left(1-\frac{e^{at}(at-1)+1}{a}\right)}{a}
\end{aligned}$$