Nome:	Cognome:	Matricola:

Esonero di Analisi I - Simulazione *

Esercizio 1 (12 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{e^{6x}}{e^{3x} - 4}.$$

determinandone:

(2 punti) Insieme di definizione;

Soluzione: Studiando gli zeri del denominatore otteniamo che il dominio è $\left(-\infty, \frac{\log 4}{3}\right) \cup \left(\frac{\log 4}{3}, +\infty\right)$.

(2 punti) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché il numeratore è sempre positivo, studiando il segno del denominatore otteniamo che $f(x) > 0$ per $x \in \left(\frac{\log 4}{3}, +\infty\right)$ e $f(x) < 0$ per $x \in \left(-\infty, \frac{\log 4}{3}\right)$; calcolando il valore di $f(0)$ otteniamo poi che l'intersezione con gli assi è data dal punto $(0, -1)$.

(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Poiché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to \frac{\log 4}{3}^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, gli asintoti sono $y = 0$ e $x = \frac{\log 4}{3}$.

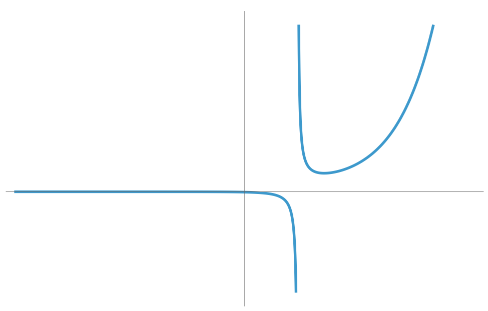
(2 punti) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Dallo studio del segno di $f'(x) = \frac{3e^{6x}(e^{3x} - 8)}{(e^{3x} - 4)^3}$ otteniamo che $f(x)$ è crescente se $x \in \left(\frac{\log 8}{3}, +\infty\right)$, decrescente se $x \in \left(-\infty, \frac{\log 4}{3}\right) \cup \left(\frac{\log 4}{3}, \frac{\log 8}{3}\right)$ e $f(x)$ ha un massimo in $x = \frac{\log 8}{3}$.

(2 punti) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Dallo studio del segno di $f''(x) = \frac{9e^{6x}\left(e^{6x} - 12e^{3x} + 64\right)}{(e^{3x} - 4)^3}$ otteniamo che $f(x)$ è concava se $x \in \left(-\infty, \frac{\log 4}{3}\right)$, convessa se $x \in \left(\frac{\log 4}{3}, +\infty\right)$ e NON ha flessi.

(2 punti) Grafico qualitativo.



Soluzione:

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di due ore.

Esercizio 2 (6 punti) Calcolare la primitiva

$$\int \frac{\cos \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} \mathrm{d}x.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} \mathrm{d}x &\overset{(y=\sqrt[3]{x+1})}{=} \int 3y \cos y \mathrm{d}y \\
&= 3y \sin y - \int 3 \sin y \mathrm{d}y \\
&= 3y \sin y + 3 \cos y \\
&= 3\sqrt[3]{x+1} \sin \sqrt[3]{x+1} + 3 \cos \sqrt[3]{x+1} + c.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (6 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{2} x \left(e^{x^4} + e^{-x}\right) \mathrm{d}x.$$

Soluzione: Poiché l'intervallo d'integrazione è simmetrico, l'integrale della funzione dispari xe^{x^4} sarà nullo, dunque:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} x \left(e^{x^4} + e^{-x}\right) \mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2} xe^{-x} \mathrm{d}x \\
&= \left[-xe^{-x}\right]_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2} e^{-x} \\
&= -2e^2 - 2e^{-2} + \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{2} \\
&= -e^2 - \frac{3}{e^2}
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 - 9 \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\frac{x'(t)}{x(t)^2 - 9} &= 1 \\
&\Rightarrow \\
\frac{1}{6} \log \frac{2(3 - x(t))}{x(t) + 3} &= \left[\frac{1}{6} \log |x - 3| - \frac{1}{6} \log |x + 3|\right]_{1}^{x(t)} \\
&= \int_{1}^{x(t)} \left(\frac{1}{6} \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{6} \frac{1}{x + 3}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{1}^{x(t)} \frac{1}{x^2 - 9} \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{t} \frac{x'(t)}{x(t)^2 - 9} \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{t} \mathrm{d}s \\
&= t \\
&\Rightarrow \\
x(t) &= \frac{6 - 3e^{6t}}{e^{6t} + 2}
\end{aligned}$$