INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \qquad \text{GRADO } f < \text{GRADO } g$$

"SPEZZIAMO" PER LINEARITÀ IN "PEZZI SEMPLICI"

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx \qquad \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,dx$$

RADICI SEMPLICI — RADICI MULTIPLE — NO RADICI REALI

QUALI PEZZI PRENDO? DIPENDE DALLE RADICI DI $g(x)$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx \qquad g(x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$ RADICE DOPPIA -1

$\Rightarrow$ VOGLIO SCRIVERMI $\frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{A}{(x+1)^1} + \frac{B}{(x+1)^2}$ PER QUALCHE COSTANTE A, B

SE AVESSI AVUTO $\frac{x}{(x+1)^3}$, $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$ CON A, B, C DA TROVARE

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{Ax + A + B}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

A, B DEVONO RISOLVERE

$$\begin{cases} A = 1 \\ A+B = 0 \Rightarrow B = -A = -1 \end{cases}$$

$A=1$, $B=-1$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\int \frac{1}{x^2-x}\,dx \qquad g(x) = x^2 - x = x(x-1)$ RADICI SEMPLICI $0, 1$

SCRIVO $\frac{1}{(x^2-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -A = 1 \to A = -1 \\ B = -A = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2-x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx = -\ln|x| + \ln|x-1| + c$$

$\int \frac{1}{x^3-x^2}\,dx \qquad g(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ 0 RADICE DOPPIA, 1 RADICE SEMPLICE $\Rightarrow \frac{1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \ldots\ldots$

(PER CASA)

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx \to \Delta = 2^2 - 4\cdot 5 = -16 < 0 \to$ NO RADICI REALI

$2x+2 \to$ DERIVATA DI $g(x) = x^2+2x+5$

$$\frac{x}{x^2+2x+5} = A\,\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{B}{} = \frac{A(2x+2)+B}{} = 2Ax + 2A + B$$

$$\frac{x}{x^2+2x+5} = A\frac{(2x+2)}{x^2+2x+5} + \frac{B}{x^2+2x+5} = \frac{A(2x+2)+B}{x^2+2x+5} = \frac{2Ax+2A+B}{x^2+2x+5}$$

$$\begin{cases} 2A=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=\frac{1}{2} \\ B=-2A=-1 \end{matrix} \Rightarrow \int \frac{x}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx - \int\frac{1}{x^2+2x+5}dx$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx \to \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)$$

$$\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx \overset{(*)}{=} \int\frac{1}{(x+1)^2+2^2}dx \overset{a=1,\ b=2}{=} \frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

$$\Rightarrow \int\frac{x}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

COME FACCIO IL PASSAGGIO (*)? COMPLETAMENTO DI QUADRATI

$\underbrace{x^2+2x}+\dots$

COSA GLI MANCA PER ESSERE UN QUADRATO? 1 VOGLIO $x^2+2x+1 = (x+1)^2$

IN GENERALE, $x^2+cx+d = \underbrace{x^2+cx+\left(\frac{c}{2}\right)^2}_{=\left(x+\frac{c}{2}\right)^2,\ \frac{c}{2}=a} + \underbrace{d-\left(\frac{c}{2}\right)^2}_{=-\frac{\Delta}{4}>0}$ AGGIUNGO E TOLGO $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ $\left(c=2 \Rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2=1\right)$

$-\frac{\Delta}{4}>0 \Rightarrow$ SARÀ IL QUADRATO DI QUALCHE $b>0$

ESEMPIO

$$\int\frac{1}{x^2+4x+13}dx$$

$$x^2+4x+13 = (\underbrace{x^2+4x+4}_{=(x+2)^2}) + \underbrace{(13-4)}_{=3^2}$$

$x^2+4x+13 = (x+a)^2+b^2$

$a=2 \quad b=3$

$$= \int\frac{1}{(x+2)^2+3^2}dx = \frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right)+c$$

$$\frac{1}{(x+2)^2+3^2} = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{(x+2)^2}{3^2}+\cancel{\frac{3^2}{3^2}}1} = \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

DERIVAZIONE DEL PRODOTTO:

INTEGRAZIONE PER PARTI

DERIVAZIONE DEL PRODOTTO:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

PRIMITIVE:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

"SCAMBIO" $f'g$ CON fg': MI CONVIENE SE $\int f(x)g'(x)dx$ È PIÙ SEMPLICE

VOGLIO CHE g' SIA PIÙ "FACILE" DI g E CHE f NON SIA MOLTO "PEGGIO" DI f'

$$\int x e^x dx = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$$

CHI È f'? CHI È g?

$g(x)$ $\quad f'(x) \Rightarrow f(x) = e^x$

$g'(x) = 1$

$$\int \underset{g(x)}{x^2} \underset{f'(x)}{e^x} dx = x^2e^x - \int 2xe^x = x^2e^x - 2(x-1)e^x + c$$

$g'(x) = 2x \quad f(x) = e^x$

ALLO STESSO MODO, $\int x^n e^x dx \quad (n \in \mathbb{N})$
(n VOLTE PER PARTI)

$$\int \underset{g(x)}{x} \underset{f'(x)}{\cos(x)} dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + c.$$

$f'(x) \rightarrow f(x) = \sin(x)$

$g'(x) = 1$

VERIFICO FACENDO DERIVATA

$\underline{x \cdot \cos(x)} + \cancel{\sin(x)} - \cancel{\sin(x)}$

$$\int \underset{g(x)}{x} \underset{f'(x)}{\sin(x)} dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c$$

$f'(x) \rightarrow f(x) = -\cos(x)$

$g'(x) = 1$

$$\int \underset{g(x)}{x^2} \underset{f'(x)}{\cos(x)} dx = x^2\sin(x) - \int 2x\sin(x)dx = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - \sin(x) + c$$

$\int x^2 \sin(x)dx =$ (PER CASA) ALLO STESSO MODO, $\int x^4\cos(x)dx$, $\int x^4 \sin(x)dx$

$$\int x^4 \cos(x)\,dx = x^4 \sin(x) - \underbrace{\int 4x^{4-1}\sin(x)\,dx}_{\text{DI NUOVO PER PARTI}}$$

$$\int \underset{f'(x)}{e^x}\, \underset{g(x)}{\sin(x)}\,dx \quad (*)$$

È INDIFFERENTE CHI È f', CHI È g PERCHÉ ENTRAMBE "ASSOMIGLIANO" ALLA RISPETTIVA DERIVATA/PRIMITIVA

$f(x) = e^x \quad g'(x) = \cos(x)$

$$e^x \sin(x) - \int \underset{f'(x)}{e^x}\, \underset{g(x)}{\cos(x)}\,dx =$$

CONTINUO A INTEGRARE e^x, CONTINUO A DERIVARE $\cos(x)$

$f(x) = e^x \quad g'(x) = -\sin(x)$

$$= e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin x)\,dx\right)$$

$$= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \underbrace{\int e^x \sin(x)\,dx}_{F(x)}.$$

HO TROVATO:

$$F(x) = e^x(\sin x - \cos x) - F(x)$$

AGGIUNGO $F(x)$

$$2F(x) = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

(*) $\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos(x)\,dx \Rightarrow \int e^x \cos(x) = e^x \sin(x) - \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$

$$= e^x\left(\frac{\sin(x) + \cos(x)}{2}\right) + c$$

$$\boxed{\int e^x \sin(x)\,dx} + \int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x)$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx$$