## SPAZI UNIFORMEMENTE CONVESSI

$$\begin{array}{l}\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1\\ \|x-y\|\ge\varepsilon\end{array} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\le 1-\delta$$

## TEOREMA (DI MILMAN-PETTIS)

SE $X$ È UNIFORMEMENTE CONVESSO ALLORA $X$ È RIFLESSIVO.

$\boxed{\text{DIM}}$ VOGLIO MOSTRARE $J(X)=X$. PER OMOGENEITÀ, BASTERÀ FAR VEDERE $J(B)=\widetilde{B}$

$B=\{x\in X : \|x\|\le 1\}$

$\widetilde{B}=\{\Lambda\in X^{**} : \|\Lambda\|\le 1\}$.

IN GENERALE, $J(B)$ È CHIUSA IN $\widetilde{B}$ $\Rightarrow$ BASTA FAR VEDERE CHE $J(B)$ È ANCHE DENSA.

DAL LEMMA DI GOLDSTINE, $J(B)$ È DENSO IN $\sigma(X^{**},X^{*})$, CIOÈ $\forall U$ APERTO IN $\sigma(X^{**},X^{*})$ $\exists J(x)\in U$. IN PARTICOLARE, $U$ DEL TIPO

$U=U_{L,\frac{\delta}{2}}(\Lambda_0)=\{\Lambda : |\Lambda L-\Lambda_0 L|<\frac{\delta}{2}\}$, DOVE $\Lambda_0\in\widetilde{B}$, $L\in X^{*}$ TALE CHE $\Lambda_0 L>1-\frac{\delta}{2}$, $\|L\|=1$, $\delta=\delta_\varepsilon$ TALE CHE

$$\begin{array}{l}\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1\\ \|x-y\|>\varepsilon\end{array} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\le 1-\delta$$

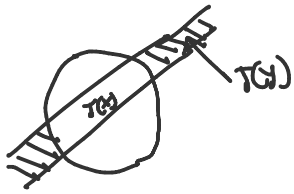
(DEF. DI UNIFORME CONVESSITÀ)

VOGLIO FAR VEDERE CHE $\boxed{\|J(x)-\Lambda_0\|\le\varepsilon}$ (*) $\Rightarrow$ DENSITÀ

SUPPONIAMO PER ASSURDO $\Lambda_0\in X^{**}\setminus\overline{B_\varepsilon(J(x))}$ $\Rightarrow$ $\underset{\substack{\downarrow\\ \text{APERTO DEBOLE*}}}{U}\setminus\underset{\substack{\downarrow\\ \text{CHIUSA DEBOLE*}}}{\overline{B_\varepsilon(J(x))}}$

$U\setminus\overline{B_\varepsilon(J(x))}$ APERTO DEBOLE*

$J(y)\in U\setminus\overline{B_\varepsilon(J(x))}$ PER QUALCHE $y\in B$ ($J(B)$ DENSA IN $\widetilde{B}$)




$\|x\|\le 1$

$\|y\|\le 1$ $\Rightarrow$ $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\le 1-\delta$

$J(y)\notin\overline{B_\varepsilon(J(x))}\Rightarrow\|x-y\|\ge\varepsilon$

UNIFORME CONVESSITÀ

$J(y) \in U \Rightarrow |Ly - \Lambda_0 L| < \frac{\delta}{2}$

$J(y) \in U \Rightarrow |Lx - \Lambda_0 L| < \frac{\delta}{2}$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \underset{\|L\|=1}{\geq} \frac{Lx+Ly}{2} \geq \frac{2\Lambda_0 L - \delta}{2} \underset{\Lambda_0 L \geq 1-\frac{\delta}{2}}{\geq} 1-\delta \quad , \text{ ASSURDO.}$$

---

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ SIA $X$ UNIF. CONVESSO $\{x_n\}$ SUCC. IN $X$ E $x \in X$. ALLORA:

$$x_n \to x \iff \begin{cases} x_n \rightharpoonup x \\ \|x_n\| \to \|x\| \text{ (SUCC. NUMERICHE)} \end{cases}$$

$\boxed{\text{OSS}}$ 1 SUGLI SPAZI NON UNIF. CONVESSI, È FALSO. AD ESEMPIO, $X = c_0$

$x_n = e_1 + e_n = (1,0,\dots,0,1,0,\dots 0) \rightharpoonup e_1 \qquad \|x_n\|_\infty = 1 = \|e_1\|_\infty$

MA $x_n \not\to e_1$ PERCHÉ $x_n - e_1 = e_n \not\to 0$.

2 $\ell_1$ NON È UNIF. CONVESSO MA L'EQUIVALENZA VALE LO STESSO PERCHÉ $x_n \to x \iff x_n \rightharpoonup x$

3 SE $X$ È HILBERT, SI DIMOSTRA FACILMENTE: $\|x_n - x\|^2 = \underbrace{\|x_n\|^2}_{\to \|x\|^2} + \|x\|^2 - 2\underbrace{(x_n, x)}_{\to (x,x)}$

$\|x_n - x\|^2 \to \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0.$

$\boxed{\text{DIM}}$ $\Rightarrow$ OVVIO

$\Leftarrow$ SUPPONIAMO $x_n \rightharpoonup x$, $\|x_n\| \to \|x\|$ SE $x=0$, È OVVIO. ALTRIMENTI,

$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, $y = \frac{x}{\|x\|}$. AVRÒ ANCORA $y_n \rightharpoonup y$, $\|y_n\| = \|y\| = 1$, $\|y_n\| \to y$. MI BASTA FAR VEDERE $y_n \to y$

SE $y_n \to y$, ALLORA $\|x_n - x\| \leq \left\|x_n - \frac{\|x\|}{\|x_n\|} x_n\right\| + \left\|\frac{\|x\|}{\|x_n\|} x_n - x\right\|$

$$= \big|\|x_n\| - \|x\|\big| + \|x\| \, \|y_n - y\| \to 0$$

SE, PER ASSURDO, $\|y_n - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{y_n + y}{2}\right\| \leq 1-\delta.$

MA $\frac{y_n+y}{2} \to y \implies \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\|y\|}} \le \liminf \left\| \frac{y_n+y}{2} \right\| \le 1-\delta$, ASSURDO.

---

**PROPOSIZIONE** DISUGUAGLIANZA DI HANNER

SE $f, g \in L^p(\mu)$, ALLORA:

$$1 \le p \le 2 \implies \|f+g\|^p + \|f-g\|^p \ge (\|f\|+\|g\|)^p + \big|\|f\|-\|g\|\big|^p$$

$$p \ge 2 \implies \|f+g\|^p + \|f-g\|^p \le (\|f\|+\|g\|)^p + \big|\|f\|-\|g\|\big|^p$$

**OSS**

① $(p=1)$ $\|f+g\| + \|f-g\| \ge 2\max\{\|f\|, \|g\|\} = \max\{\|(f+g)+(f-g)\|, \|(f+g)-(f-g)\|\}$

È LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE!

② $(p=2)$ $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = (\|f\|+\|g\|)^2 + (\|f\|-\|g\|)^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$

È LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA!

---

**DIM. DISUGUAGLIANZA DI HANNER** SOLO IL CASO $p \le 2$, $p \ge 2$ È UGUALE

VOGLIAMO OTTENERE: $\|f+g\|^p + \|f-g\|^p \ge (\|f\|+\|g\|)^p + (\|f\|-\|g\|)^p$ (POSSO SUPPORRE $\|f\| \ge \|g\|$, A MENO DI SCAMBIARE)

$$\ge \left((\|f\|+\|g\|)^{p-1} + (\|f\|-\|g\|)^{p-1}\right)\|f\| + \left((\|f\|+\|g\|)^{p-1} - (\|f\|-\|g\|)^{p-1}\right)\|g\|$$

$$= \underbrace{\left(\left(1+\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1} + \left(1-\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1}\right)}_{a\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)}\|f\|^p + \underbrace{\left(\left(1+\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1} - \left(1-\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1}\right)\frac{\|f\|^{p-1}}{\|g\|^{p-1}}}_{b\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)}\|g\|^p$$

$$\boxed{a(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}} \qquad \boxed{b(r) = \frac{(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}}{r^{p-1}}} \qquad (0 \le r \le 1)$$

SEGUIRÀ DALLA STIMA PUNTUALE Q.O. $x$:

$$|f(x)+g(x)|^p + |f(x)-g(x)|^p \ge a\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)|f(x)|^p + b\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)|g(x)|^p$$

BASTA FAR VEDERE CHE:

$$|A+B|^p + |A-B|^p \overset{(**)}{\ge} a(r)|A|^p + b(r)|B|^p \quad \forall A, B \in \mathbb{R} \ \forall r \in (0,1)$$

POSSIAMO RIDURCI ~~ULTERIORMENTE~~ RIDURCI AL CASO $|A| \ge |B|$:

(**)

POSSIAMO RIDURCI ~~ULTERIORMENTE~~ RIDURCI AL CASO $|A| \geq |B|$:

INFATTI, SE $|A| \leq |B|$, ALLORA $a(r)|A|^p + b(r)|B|^p \overset{(*)}{\leq} a(r)|B|^p + b(r)|A|^p$

PERCHÈ $\left(a(r)-b(r)\right)' = (p-1)\left(\frac{2^p+1}{2^p}\right)\left(\frac{1}{(1+r)^{2-p}} - \frac{1}{(1-r)^{2-p}}\right) \leq 0$

$\Rightarrow a(r)-b(r)$ DECRESCE

$$0 = (a(1)-b(1))(|B|^p - |A|^p) \leq (a(r)-b(r))(|B|^p - |A|^p) = a(r)|B|^p + b(r)|A|^p - (a(r)|A|^p + b(r)|B|^p)$$

$\Rightarrow$ VALE (*)

PER DIMOSTRARE (**), CALCOLIAMO IL MAX DI

$r \to a(r)|A|^p + b(r)|B|^p$:

$$\left(a(r)|A|^p + b(r)|B|^p\right)' = (p-1)\left(\frac{1}{(1+r)^{2-p}} - \frac{1}{(1-r)^{2-p}}\right)\left(|A|^p - \frac{|B|^p}{r^p}\right)$$

ASSUME IL MAX IN $r = \frac{|B|}{|A|}$

$$\Rightarrow a(r)|A|^p + b(r)|B|^p \leq a\left(\frac{|B|}{|A|}\right)|A|^p + b\left(\frac{|B|}{|A|}\right)|B|^p = \big||A|+|B|\big|^p + \big||A|-|B|\big|^p$$

$$= |A+B|^p + |A-B|^p$$

**COROLLARIO** $L^p(\mu)$ È UNIF. CONVESSO $\forall p \in (1,+\infty)$

**DIM** ($p \geq 2$) PRENDO $f, g$ TALI CHE $\|f\| = \|g\| = 1$, $\|f-g\| \geq \varepsilon$.

HANNER $\Rightarrow \|f+g\|^p + \|f-g\|^p \leq 2^p$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\| \leq \left(1 - \frac{\|f-g\|^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1-\delta \quad \text{SE} \quad \delta = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

($p \leq 2$) APPLICO HANNER A $\frac{f+g}{2}, \frac{f-g}{2}$:

$$\|f\|^p + \|g\|^p \geq \left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\| + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|\right)^p + \left|\left\|\frac{f+g}{2}\right\| - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|\right|^p$$

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE NON SIA UNIF. CONV.

$\exists f_n, g_n$ : $\|f_n\| = 1 = \|g_n\|$ $\|f_n - g_n\| \to \varepsilon$, $\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\| \to 1$. ALLORA:

$$2 = \|f_n\|^p + \|g_n\|^p \geq \left(\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\| + \left\|\frac{f_n-g_n}{2}\right\|\right)^p + \left|\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\| - \left\|\frac{f_n-g_n}{2}\right\|\right|^p$$

$$\to 2 = \|f_n\|^p + \|g_n\|^p \geq \left( \left\| \frac{f_n+g_n}{2} \right\| + \left\| \frac{f_n-g_n}{2} \right\| \right)^p + \left| \left\| \frac{f_n+g_n}{2} \right\| - \left\| \frac{f_n-g_n}{2} \right\| \right|^p$$

$$\to \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

$$\Rightarrow 2 \geq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^p > 2$$ ASSURDO $\Rightarrow$ DEV'ESSERE UNIF. CONV.

$\forall \varepsilon > 0$ ESERCIZIO DI CALCOLO.