DIM. TEO SPETTRALE PER OP. COMPATTI

① SE $A \in K(X)$ E $\underline{\dim X} = +\infty$ ALLORA $0 \in \sigma(A)$.

<u>DIM</u> SE PER ASSURDO $0 \notin \sigma(A)$, A SAREBBE INVERTIBILE

$$\Rightarrow \underset{\text{CONTINUO}}{I = A^{-1}} \circ \underset{\text{COMPATTO}}{A}$$ È COMPATTO, IMPOSSIBILE SE $\dim X = +\infty$

② SE $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ È AUTOVALORE. $\qquad I - \frac{A}{\lambda}$

<u>DIM</u> SE λ NON È AUTOVALORE, FACCIO VEDERE CHE $\lambda \notin \sigma(A)$:

$A - \lambda I = -\lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)$ NON INIETTIVO $\Longleftrightarrow$ $I - \frac{A}{\lambda}$ NON INIETTIVO $\underset{\text{FREDHOLM A } I - \frac{A}{\lambda}}{\Longleftrightarrow}$ $I - \frac{A}{\lambda}$ NON SURIETTIVO

$\Updownarrow$

$A - \lambda I$ NON SURIETTIVO

$\Downarrow$

$A - \lambda I$ NON INVERTIBILE

CIOÈ $\lambda \notin \sigma(A)$

---

③ $\exists!$ DECOMPOSIZIONE $K(\lambda)$, $R(\lambda)$ TALI CHE $X = K(\lambda) \oplus R(\lambda)$

E $\underline{A - \lambda I : K(\lambda) \to K(\lambda)}$ NILPOTENTE

$\underline{A - \lambda I : R(\lambda) \to R(\lambda)}$ INVERTIBILE

<u>DIM</u> TROVO $K(\lambda) = K_N$, $R(\lambda) = R_N$ APPLICANDO FREDHOLM A $I - \frac{A}{\lambda}$.

VERIFICO L'UNICITÀ: SUPPONIAMO $X = K' \oplus R'$ CON LE STESSE PROPRIETÀ.

FACCIO VEDERE $K' = K(\lambda)$, $R' = R(\lambda)$. PRENDO $x \in K'$, SCRIVO $x = \underset{\in K(\lambda)}{y} + \underset{\in R(\lambda)}{z}$

APPLICO $(A - \lambda I)^N \Rightarrow \underbrace{\cancel{(A - \lambda I)^N}}_{= 0} x = \underbrace{\cancel{(A - \lambda I)^N}}_{= 0} y + (A - \lambda I)^N z$

PERCHÉ $(A - \lambda I)$ NILPOTENTE SU K', $K(\lambda)$

$\Rightarrow (A - \lambda I)^N z = 0$ MA $(A - \lambda I)^N$ È INVERTIBILE SU $R(\lambda) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = y \in K(\lambda)$

DUNQUE $K' \subset K(\lambda)$, INVERTENDO I RUOLI $K(\lambda) \subset K' \Rightarrow K' = K(\lambda)$

PRENDO $x \in R'$, $x = \underset{\in K(\lambda)}{y} + \underset{\in R(\lambda)}{z}$, APPLICO $(A - \lambda I)^N \Rightarrow (A - \lambda I)^N x = (A - \lambda I)^N z$

$(A - \lambda I)^N (R') \subset R(\lambda) \quad \Rightarrow \quad R' = (A - \ldots)^N \ldots$

$K(\lambda)$

$\underbrace{(A-\lambda I)^N}_{\text{INVERTIBILE SU } R'}(R') \subset R(\lambda) \Rightarrow R' = (A-\lambda I)^N R' \subset R(\lambda)$, ALLO STESSO MODO $R(\lambda) \subset R'$ $\Rightarrow R' = R(\lambda)$.

④ $K(\lambda) \supset \ker(A-\lambda I) \quad R(\lambda) \subset \operatorname{Ran}(A-\lambda I)$

DIM SEGUE DALLA SCELTA $K(\lambda) = \ker(A-\lambda I)^N \quad R(\lambda) = \operatorname{Ran}(A-\lambda I)^N$.

⑤ $\sigma(A) \setminus \{0\}$ È DISCRETO.

DIM PRENDO $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$, DECOMPONGO $X = K(\lambda) \oplus R(\lambda)$. $\quad A-\lambda I : K(\lambda) \to K(\lambda)$, $\quad A-\lambda I : R(\lambda) \to R(\lambda)$

$\Rightarrow A-\mu I : K(\lambda) \to K(\lambda)$ FACCIO VEDERE CHE SE μ VICINO λ ALLORA
$A-\mu I : R(\lambda) \to R(\lambda)$ $\quad A-\mu I|_{K(\lambda)}$ È INVERTIBILE, $A-\mu I|_{R(\lambda)}$ È INVERTIBILE ✓

POICHÉ $A-\lambda I|_{R(\lambda)}$ È INVERTIBILE, ANCHE $A-\mu I|_{R(\lambda)}$ È INVERTIBILE SE $|\mu-\lambda|$ PICCOLO

$(A-\mu I)|_{K(\lambda)}$ È INVERTIBILE $\forall \mu \neq \lambda$! INFATTI, L'INVERSO È

$$(A-\mu I)^{-1} = (A-\lambda I + (\mu-\lambda) I)^{-1} = \frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{A-\lambda I}{\mu-\lambda} + I\right)^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SERIE GEOMETRICA}}}{=} \frac{1}{\mu-\lambda} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{(\mu-\lambda)^k}(A-\lambda I)^k$$

PERCHÉ $(A-\lambda I)^N = 0$

⑥ $K(\mu) \subset R(\lambda)$ SE $\lambda \neq \mu$

DIM PRENDO $x \in K(\mu)$ $\quad \underline{x = \underset{\in K(\lambda)}{y} + \underset{\in R(\lambda)}{z}}$. $\quad (A-\mu I)^N : K(\lambda) \to K(\lambda)$ (COME PRIMA) $\quad (A-\mu I)^N : R(\lambda) \to R(\lambda)$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{(A-\mu I)^N x} = \underbrace{(A-\mu I)^N y}_{\in K(\lambda)} + \underbrace{(A-\mu I)^N z}_{\in R(\lambda)}$$

PERCHÉ $\mu \in K(\mu)$

MA $K(\lambda) \cap R(\lambda) = \{0\} \Rightarrow$ DEV'ESSERE
$(A-\mu I)^N y = 0$
$(A-\mu I)^N z = 0$

MA $(A-\mu I)^N$ INVERTIBILE SU $K(\lambda)$ (COME PRIMA) $\Rightarrow y = 0$, CIOÈ $x = z \in R(\lambda)$.

$A : X \to Y \qquad B = A^t \quad b_{ij} = a_{ji} \qquad (Ax, y) = (x, A^t y)$

$A: X \to Y$ $\qquad B = A^t \leadsto b_{ij} = a_{ji}$ $\qquad (A_\varepsilon x, y)_Y = (x, A^t y)_X$

$A^t: Y \to X$ $\qquad b_{ij} = (e_j, Be_i)$, $\quad a_{ji} = (Ae_j, e_i)$, $\quad A_\varepsilon \in X$

OPERATORE AGGIUNTO

"TRASPOSTA CONIUGATA"

DEF DATO $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ CON X, Y HILBERT COMPLESSI, IL SUO AGGIUNTO È $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ TALE CHE $(Ax, y)_Y = (x, A^* y)_X \quad \forall x \in X, y \in Y$.

OSS (1) SI VERIFICA CHE A^* È: BEN DEFINITO, LINEARE, CONTINUO $\left(\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \right)$ E UNICO.

(2) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^* \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \; \forall A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$

$(AB)^* = B^* A^* \quad \forall A \in \mathcal{L}(X,Y) \; \forall B \in \mathcal{L}(Z,X)$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ SE A È INVERTIBILE

$A^{**} = A$

ESEMPI

(0) SE X, Y HANNO DIM. FINITA, A^* È RAPPRESENTATO DALLA TRASPOSTA CONIUGATA DELLA MATRICE CHE RAPPRESENTA A (RISPETTO A BASI ORTONORMALI)

(1) $I: X \to X$ IDENTITÀ $\Rightarrow I^* = I$

(2) $A =$ SHIFT DESTRO $\quad A: \ell_2 \to \ell_2 \quad \Rightarrow A^* =$ SHIFT SINISTRO

$(x(1), x(2) \dots) \to (0, x(1), x(2) \dots) \qquad A^*: (x(1), x(2) \dots) \to (x(2), x(3) \dots)$

(3) $L^2(M) \xrightarrow{A} L^2(M) \quad g \in L^\infty(M) \qquad L^2(M) \xrightarrow{A^*} L^2(M)$

$f \longrightarrow fg \qquad\qquad f \longrightarrow f\bar{g}$

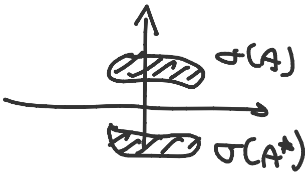
LEMMA (PROPRIETÀ DELL'AGGIUNTO)

SIA $A \in \mathcal{L}(X)$, X HILBERT COMPLESSO, E A^* IL SUO AGGIUNTO ALLORA:

LEMMA (PROPRIETÀ DELL'AGGIUNTO)

SIA $A \in \mathcal{L}(X)$, X HILBERT COMPLESSO, E A^* IL SUO AGGIUNTO. ALLORA:

1. $\ker(A^*) = (\operatorname{ran} A)^\perp$
2. $\overline{\operatorname{ran}(A^*)} = (\ker A)^\perp$
3. $\sigma(A^*) = \{\bar\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} = \operatorname{coniug}(\sigma(A))$



4. $A \in K(X) \iff A^* \in K(X)$, SE SÌ $\underbrace{\operatorname{ran}(I-A^*) = \ker(I-A)^\perp}$

$\Rightarrow \dim(\ker(I-A)) = \dim \underbrace{H / \operatorname{ran}(I-A^*)}$

DIM

1. DEF. DI AGGIUNTO $(Ax, y) = (x, A^* y)$

(Ax,y) NULLO $\forall x \iff y \perp \operatorname{ran}(A)$

(x, A^*y) NULLO $\forall x \iff A^* y = 0 \iff y \in \ker(A^*)$

2. $\overline{\operatorname{ran} A^*} = (\operatorname{ran} A^*)^{\perp\perp} \underset{\uparrow \, ①}{=} (\ker A^{**})^\perp \underset{\uparrow \, A^{**}=A}{=} (\ker A)^\perp$

3. $\lambda \in \sigma(A^*) \iff A^* - \lambda I$ <u>NON</u> È INVERTIBILE

$\iff (A^* - \lambda I)^*$ NON È INVERTIBILE $\iff \bar\lambda \in \sigma(A)$

$(A^* - \lambda I)^* = A^{**} - \bar\lambda I^* = A - \bar\lambda I$

4. BASTA MOSTRARE CHE A COMPATTO $\Rightarrow A^*$ COMPATTO. DA QUESTO SEGUE

$\operatorname{ran}(I-A^*) \underset{\uparrow \, \operatorname{ran}(I-A^*) \text{ CHIUSO}}{=} \overline{\operatorname{ran}(I-A^*)} = \overline{\operatorname{ran}((I-A)^*)} = \ker(I-A)^\perp.$

FACCIO VEDERE A^* COMPATTO: PRENDO $\{x_n\}$ LIMITATA

A MENO DI ESTRATTE, $x_n \rightharpoonup x$. MOSTRIAMO $A^* x_n \to A^* x$!

A MENO DI ESTRATTE, $x_n \to x$. MOSTRIAMO $A^* x_n \to A^* x$!

$$\|A^*x_n - A^*x\|^2 = (A^*(x_n-x), A^*(x_n-x)) = (x-x_n, AA^*(x-x_n))$$

$$\le \underbrace{\|x-x_n\|}_{\le C} \, \|AA^*(x-x_n)\| \longrightarrow 0$$

PERCHÉ $x_n \to x$

$A^* x_n \to A^* x$ PERCHÉ A^* CONTINUO

$A(A^* x_n) \to A(A^* x)$ PERCHÉ A COMPATTO.

DEF UN OPERATORE $A \in \mathcal{L}(H)$ SU H HILBERT COMPLESSO SI CHIAMA <u>AUTOAGGIUNTO</u> SE COINCIDE COL SUO AGGIUNTO, CIOÈ $A^* = A$ CIOÈ $(Ax, y) = (x, Ay) \ \forall x, y \in H$ $\quad (a_{ij} = \overline{a_{ji}})$

ESEMPI ① SONO AUTOAGGIUNTI GLI OPERATORI: IN DIM. FINITA, QUELLI RAPPRESENTATI DA MATRICI HERMITIANE; $I: H \to H$ SU OGNI HILBERT H;

$L^2(M) \xrightarrow{A} L^2(M)$ CON g A VALORI <u>REALI</u>

$f \longmapsto fg$

② È AUTOAGGIUNTO $A: L^2((a,b)) \to L^2((a,b))$ RISOLVENTE DI EQ. DIFF.

$f \longmapsto u$

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

PROPOSIZIONE (PROPRIETÀ DEGLI OP. AUTOAGGIUNTI)

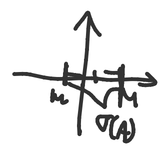
SE A È AUTOAGGIUNTO, ALLORA:

① $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

② $\sigma_r(A) = \emptyset$

③ SE λ, μ SONO AUTOVALORI, $\lambda \neq \mu$, x, y AUTOVETTORI ASSOCIATI $\Rightarrow x \perp y$

④ $\sigma(A) \subset [m, M]$ $\qquad m = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x) \qquad M = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$



⑤ $m, M \in \sigma(A) \Rightarrow \rho(A) = \max\{|m|, |M|\} = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$

⑥ $\rho(A) = \|A\|$

$\ldots \{|m|,|M|\} = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Ax,x\rangle|$

(6) $\rho(A) = \|A\|$

COROLLARIO (1) DA (6) OTTENIAMO CHE $\sigma(A)=\{0\} \iff A=0$

(2) DA (3) SEGUE CHE SE H È SEPARABILE ALLORA GLI AUTOVALORI SONO AL PIÙ NUMERABILI.

ESEMPIO $L^2((0,1)) \xrightarrow{A} L^2((0,1))$ AUTOAGGIUNTO

$$f(x) \longrightarrow x f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} m &= \inf_{\int|f|^2=1} \int x f(x)\overline{f(x)}\,dx = 0 \\ M &= \sup_{\int|f|^2=1} \int x f(x)\overline{f(x)}\,dx = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma(A) \overset{(4)}{\subset} [0,1] \qquad \sigma(A) \overset{(5)}{\ni} \{0,1\}$$

IN REALTÀ $\sigma(A)=[0,1]$: SE $A-\lambda I$ È INVERTIBILE, $(A-\lambda I)f = g \quad 0\le x\le 1$

$$x f(x) - \lambda f(x) = g(x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda}$$

$(A-\lambda I)^{-1} : g(x) \to \dfrac{g(x)}{x-\lambda}$ NON DEFINITO SE $0\le\lambda\le 1$

MA NON CI SONO AUTOVALORI: $(A-\lambda I)f = 0 \iff x f(x) - \lambda f(x) = 0$ q.o. x IMPOSSIBILE SE $f\neq 0$.

$\sigma_c(A) = \sigma(A) = [0,1]$ MA $\sigma_p(A) = \emptyset$.

DIM. PROPOSIZIONE

(1) DAL LEMMA PRECEDENTE, $\sigma(A^*) = \underline{\mathrm{Conj}(\sigma(A))} \Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$

$A^*=A \rightarrow \sigma(A^*) = \sigma(A)$

(2) FACCIO VEDERE CHE SE $A-\lambda I$ È INIETTIVO, ALLORA $\mathrm{ran}(A-\lambda I)$ È DENSO.

$$\underline{\{0\}} = \ker(A-\lambda I) = \ker((A^*-\bar\lambda I)^*) \underset{\substack{A=A^* \\ \lambda=\bar\lambda\ (1)}}{=} \ker((A-\lambda I)^*) = \underline{\mathrm{ran}(A-\lambda I)^\perp}$$

$$(\mathrm{ran}(A-\lambda I))^\perp = \{0\} \Rightarrow \mathrm{ran}(A-\lambda I) \text{ DENSO.}$$

③ $Ax = \lambda x$

$Ay = \mu y$

$$\begin{array}{c} (Ax, y) \\ \| \\ (\lambda x, y) \\ \| \\ \lambda (x, y) \end{array} = (x, Ay) = (x, \mu y) \underset{① \ \mu = \bar{\mu}}{=} \mu (x, y) \qquad \lambda \neq \mu \Rightarrow (x, y) = 0$$

④ Anzitutto, $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ perché $(Ax, x) \underset{\text{sempre}}{=} \overline{(x, Ax)} \underset{\text{autoaggiunto}}{=} \overline{(Ax, x)} \Rightarrow \in \mathbb{R}$

Facciamo vedere: $\lambda > M \Rightarrow A - \lambda I$ invertibile ($\lambda < m$ allo stesso modo)

$A - \lambda I$ è iniettivo:

$$-((A - \lambda I)x, x) \leq \|(A - \lambda I)x\| \, \|x\|$$

$$\| \qquad\qquad \Rightarrow \|(A - \lambda I)x\| \geq (\lambda - M)\|x\| > 0 \text{ se } x \neq 0$$

$$\lambda \|x\|^2 - (Ax, x) \geq \lambda \|x\|^2 - M \|x\|^2$$

$A - \lambda I$ iniettivo $\overset{②}{\Rightarrow}$ $\mathrm{Ran}(A - \lambda I)$ denso, basta mostrare che è chiuso:

Se $(A - \lambda I)x_n \to y_0$, allora x_n è Cauchy perché

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{\|(A - \lambda I)(x_n - x_m)\|}{\lambda - M} \to 0 \qquad (\|(A - \lambda I)(x_n - x_m)\| \to y_0 - y_0 = 0) \qquad \Rightarrow x_n \to x_0$$

$\Rightarrow (A - \lambda I)x_n \to (A - \lambda I)x_0 \in \mathrm{Ran}(A - \lambda I)$

chiuso.