Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 16/02/2026 *

Esercizio 1 (3 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione

$$|z|^6 - aiz^3 = 0. \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione: Scrivendo $|z|^6 - aiz^3 = z^3\left(\overline{z}^3 - ai\right) = z^3\overline{(z^3 + ai)}$ si ottiene che le soluzioni sono gli zeri di uno dei due fattori, cioè, scrivendo $-ai = \sqrt[3]{a}e^{\frac{3}{2}\pi}$

$$z = 0, z = \sqrt[3]{a}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Esercizio 2 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\arcsin\left(\frac{a}{\sqrt[3]{n}}\right) - an\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right). \qquad \left(a = 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

Soluzione: Dagli sviluppi di Taylor

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right), \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

si ottiene che

$$\begin{aligned}
n\arcsin\left(\frac{a}{\sqrt[3]{n}}\right) - an\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) &= n\left(\frac{a}{\sqrt[3]{n}} + \frac{a^3}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - an\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{a^3 + 2a}{6} + o(1) \\
&\underset{n\to\infty}{\to} \frac{a^3 + 2a}{6}.
\end{aligned}$$

---

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = e^{4x}(ae^x - 1)^2, \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per ogni valore reale, cioè

$$(-\infty, +\infty).$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Essendo gli esponenziali sempre positivi, otteniamo che

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x < -\ln a, x > -\ln a \\ f(x) &= 0 \quad \text{per } x = -\ln a, \end{aligned}$$

dunque in particolare il grafico di f interseca l'asse orizzontale in $(-\ln a, 0)$ e, essendo $f(0) = (a-1)^2$, interseca l'asse verticale in $\big(0, (a-1)^2\big)$.

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio vale

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

dunque $y = 0$ è un asintoto orizzontale, ed essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ non ci sono altri asintoti.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x) = e^{4x}\left(6a^2e^{2x} - 10ae^x + 4\right)$ si deduce che

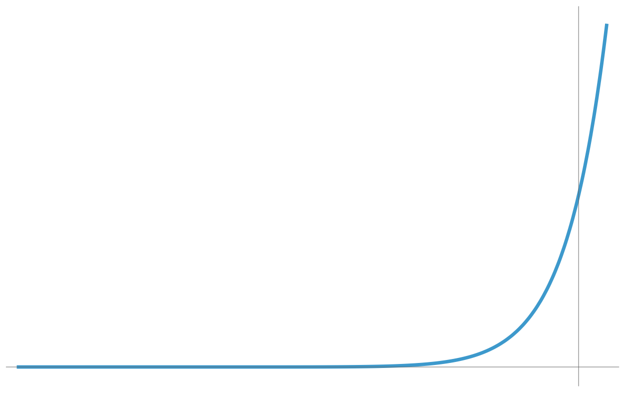
$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente per} & x < -\ln\left(\frac{3}{2}a\right), x > -\ln a \\ f(x) & \text{è decrescente per} & -\ln\left(\frac{3}{2}a\right) < x < -\ln a \\ f(x) & \text{ha un massimo in} & x = -\ln\left(\frac{3}{2}a\right) \\ f(x) & \text{ha un minimo in} & x = -\ln a. \end{array}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = e^{4x}\left(36a^2e^{2x} - 50ae^x + 16\right)$ si ottiene che

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa per} & x < -\ln(2a), x > -\ln\left(\frac{9}{8}a\right) \\ f(x) & \text{è concava per} & -\ln(2a) < x < -\ln\left(\frac{9}{8}a\right) \\ f(x) & \text{ha un flesso in} & x = -\ln(2a), -\ln\left(\frac{9}{8}a\right). \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{\pi}{3a}}^{\frac{\pi}{2a}} \sin(ax)\ln(\sin(ax))\mathrm{d}x. \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3a}}^{\frac{\pi}{2a}} \sin(ax)\ln(\sin(ax))\mathrm{d}x &\overset{(y=ax)}{=} \frac{1}{a}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\ln(\sin y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{a}\left([-\cos(y)\ln(\sin y)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos y)\frac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y}{1-\cos^2 y}\sin y\mathrm{d}y\right) \\
&\overset{(z=\cos y)}{=} \frac{1}{a}\left(\frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z^2}{1-z^2}\mathrm{d}z\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - 1\right)\mathrm{d}z\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{3}{4}\ln 3 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (3 punti) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\arctan(a\sqrt{x})\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right)}{\arctan(cx)\arctan\left(\frac{d}{x}\right)}\mathrm{d}x. \qquad (a = 1, 2, b = 1, 2, c = 1, 2, d = 1, 2)$$

Soluzione: Poiché $\lim_{x\to+0^+} \frac{\frac{\arctan(a\sqrt{x})\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right)}{\arctan(cx)\arctan\left(\frac{d}{x}\right)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{a}{c}$, allora l'integrale ha lo stesso andamento di $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, cioè

CONVERGE.

Esercizio 6 (3 punti) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{1}{k+a}}-\cos\frac{2}{\sqrt{k+b}}\right). \qquad (a=1,2, b=1,2)$$

Soluzione: Dallo sviluppo di Taylor $e^{-\frac{1}{n+a}}-\cos\left(\frac{2}{\sqrt{n+b}}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ segue che, per il criterio del confronto asintotico, la serie ha lo stesso comportamento di $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ e cioè

NON CONVERGE.

Esercizio 7 (6 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x)=\dfrac{\ln(x+a)}{y(x)^3} \\ y(0)=-1 \end{cases}. \qquad (a=2,3,4,5)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
y'(x)y(x)^3 &= \ln(x+a) \\
&\Rightarrow \\
\frac{y^4(x)-1}{4} &= \int_{-1}^{y(x)} y^3 \mathrm{d}y \\
&= \int_0^x y(t)^3 y'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \ln(t+a)\mathrm{d}t \\
&= [(t+a)\ln(t+a)-s]_0^x \\
&= (x+a)\ln(x+a)-x-a\ln a \\
&\Rightarrow \\
y(x) &= -\sqrt[4]{1+4(x+a)\ln(x+a)-4x-4a\ln a}.
\end{aligned}$$