Nome:	Cognome:	Matricola:

Esonero di Analisi I - 15/01/2026 *

Esercizio 1 (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\arctan(\sqrt{ax})}{(ax+3)^2}\mathrm{d}x. \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\arctan(\sqrt{ax})}{(ax+3)^2}\mathrm{d}x \quad &\overset{(y=\sqrt{ax})}{=} \quad \frac{2}{a}\int_0^1 \frac{\arctan y}{(y^2+3)^2} y\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{a}\left(\left[-\frac{\arctan y}{2(y^2+3)}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}\frac{1}{y^3+3}\frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{2}{a}\left(-\frac{\pi}{32} + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{y^2}{3}+1}\right)\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{2}{a}\left(-\frac{\pi}{32} + \frac{1}{2}\left[\frac{\arctan y}{2} - \frac{\arctan\frac{y}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}\right]_0^1\right) \\
&= \frac{2}{a}\left(-\frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{24\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{3\sqrt{3}-4}{48a\sqrt{3}}\pi.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti) Discutere la convergenza degli integrali impropri:

(4 punti) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{\ln\left(1+x^{a+\frac{1}{2}}\right)}\sin^2\left(\frac{x^{a+1}+1}{x^{a+2}+x^a}\right)\mathrm{d}x; \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$

Soluzione: Poiché $\displaystyle\left|\frac{x^a}{\ln\left(1+x^{a+\frac{1}{2}}\right)}\sin^2\left(\frac{x^{a+1}+1}{x^{a+2}+x^a}\right)\right| \le \frac{x^a}{\ln\left(1+x^{a+\frac{1}{2}}\right)}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^a}{\ln\left(1+x^{a+\frac{1}{2}}\right)}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = 1$, allora l'integrale ha lo stesso andamento di $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$, cioè

CONVERGE.

(4 punti) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{\ln\left(1+x^{a+\frac{1}{2}}\right)}\sin^2\left(\frac{x^{a+1}+1}{x^{a+2}+x^a}\right)\mathrm{d}x; \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$

Soluzione: Poiché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^a}{\ln\left(1+x^{a+\frac{1}{2}}\right)}\sin^2\left(\frac{x^{a+1}+1}{x^{a+2}+x^a}\right)}{\frac{x^{a-2}}{\ln x}} = a+\frac{1}{2}$, allora l'integrale ha lo stesso andamento di $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-2}}{\ln x}\mathrm{d}x$, cioè

NON CONVERGE.

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di due ore.

Esercizio 3 (8 punti) Discutere la convergenza delle serie:

$$\text{(4 punti)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{k+a+2}{k+a}\right)^{k^2}}{2^{2k}}; \qquad (a = 1, 2, 3, 4)$$

Soluzione: Poiché $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+a+2}{n+a}\right)^{n^2}}{2^{2n}}} = \frac{e^2}{4} > 1$, dal criterio del rapporto otteniamo che la serie

NON CONVERGE.

$$\text{(4 punti)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{k+a+2}{k+a}\right)^{k^2}}{2^{2k}}; \qquad (a = 1, 2, 3, 4).$$

Soluzione: Come nel punto precedente, dal criterio del rapporto segue che la serie non è infinitesima e cioè

NON CONVERGE.

Esercizio 4 (8 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = 3ax^2 y(x) + bx^8 \\ y(0) = 0 \end{cases} . \qquad (a = \pm 1, b = \pm 1)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{\int_0^x 3at^2 \mathrm{d}t} \int_0^x e^{-\int_0^t 3as^2 \mathrm{d}s} bt^8 \mathrm{d}t \\
&= be^{ax^3} \int_0^x e^{-at^3} t^8 \mathrm{d}t \\
&\overset{(s=-at^3)}{=} \frac{b}{3a^3} e^{ax^3} \int_{-ax^3}^0 e^s s^2 \mathrm{d}y \\
&= \frac{b}{3a^3} e^{ax^3} \left[e^s \left(s^2 - 2s + 2\right) \right]_{-at^3}^0 \\
&= \frac{b}{3a^3} e^{ax^3} \left[2 - e^{-ax^3} \left(a^2 x^6 + 2ax^3 + 2\right) \right] \\
&= \frac{b}{3a^3} \left(2e^{ax^3} - a^2 x^6 - 2ax^3 - 2 \right).
\end{aligned}$$