DERIVATE DEBOLI

GENERALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI DERIVATA "CLASSICA" (LIMITE D. RAPPORTO INCREMENT.)

MOTIVAZIONE: FUNZIONANO "MEGLIO" PER RISOLVERE EQ. DIFFERENZIALI

IDEA: <u>INTEGRAZIONE PER PARTI</u>.

u, v DERIVABILI SU $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^b uv' = \underbrace{u(b)v(b) - u(a)v(a)} - \int_a^b u'v$

SE POI $\underline{v(a)=v(b)=0}$, ALLORA $\underline{\int_a^b uv' = -\int_a^b u'v}$

DEFINIZIONE SIA $u \in L^1_{loc}((a,b))$. $\left(u \in L^1([c,d]) \text{ se } [c,d] \subset (a,b)\right)$

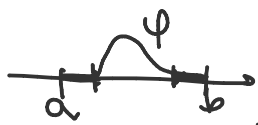
CON $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $a<b$.

DICO CHE u È <u>DERIVABILE IN SENSO DEBOLE</u>

SE $\exists\, g \in L^1_{loc}((a,b))$: $\boxed{\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b g\varphi}$ $\forall \varphi \in C^1_0((a,b))$

$(*)$

$\left(\varphi \in C^1((a,b)),\ \varphi \equiv 0 \text{ FUORI DA UN COMPATTO IN } (a,b)\right)$



g È LA <u>DERIVATA DEBOLE</u> DI u. NOTAZIONE: $g = u'$.

ESEMPI

1. SE u È DERIVABILE IN (a,b) ALLORA È DERIVABILE IN SENSO DEBOLE.

2. $u(x)=|x|$ È DERIVABILE IN SENSO DEBOLE SU $\mathbb{R}$!

CERCHIAMO g PER CUI VALE $(*)$: PRENDO $\varphi \in C^1_0((a,b))$:

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi' = \int_0^{+\infty} x\varphi'(x) - \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x) = \cancel{\left[x\varphi(x)\right]_0^{\infty}} - \int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx - \cancel{\left[x\varphi(x)\right]_{-\infty}^0} + \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\,dx$$

PER PARTI SEPARATAMENTE

x SI ANNULLA IN 0

φ SI ANNULLA IN $\pm\infty$

$= -\int_0^{\infty}\varphi + \int_{-\infty}^{0}\varphi = -\int(\ldots$ $1 \quad x>0$

SEPARATAMENTE E SI ANNULLA IN $\pm\infty$

$$= -\int_0^{\infty}\varphi + \int_{-\infty}^{0}\varphi = -\int_{\mathbb{R}}\varphi g \qquad g = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases} = \text{SEGNO}(x)$$

(3) $u(x) = \text{SEGNO}(x)$ NON È DERIVABILE IN SENSO DEBOLE: (SU $\mathbb{R}$)

SE ESISTESSE g TALE CHE $\int_{\mathbb{R}} u\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} \varphi g$, ALLORA

$$-\int_{\mathbb{R}}\varphi g = \int_{\mathbb{R}} u\varphi' = \int_0^{\infty}\varphi' - \int_{-\infty}^{0}\varphi' = -\varphi(0) - \varphi(0) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}}\varphi g = 2\varphi(0)$$

IMPOSSIBILE
($g = 2\delta_0$)

OSSERVAZIONI

(1) L'ESISTENZA DI DERIVATE DEBOLI NON DIPENDE DA INSIEMI DI MISURA NULLA: SE $u' = g$ SU (a,b) E $f = g$ Q.O. SU (a,b), ALLORA $u' = f$

INOLTRE SE $u = v$ Q.O. SU (a,b) ALLORA $u' = v'$ SU (a,b)

(2) LA DERIVATA DEBOLE È UNICA A MENO DI INSIEMI DI MISURA NULLA:

SE $u' = g_1 = g_2$. PRENDO $\varphi \in C_0^1((a,b))$ $\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b \varphi g_1 = -\int_a^b \varphi g_2 \Rightarrow \int_a^b \varphi(g_1 - g_2) = 0$

$$\Downarrow$$

$g_1 - g_2 \equiv 0$ q.o.

(3) VALGONO LE REGOLE DI DERIVAZIONE:

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = uv' + u'v$ SE u OPPURE $v \in C^1$

$(H(u))' = H'(u)u'$ SE $H \in C^1$

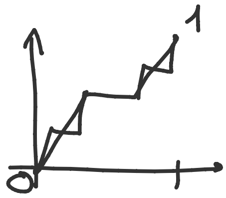
DEFINIZIONE u SI DICE ASSOLUTAMENTE CONTINUA SU $[a,b]$

SE u È DERIVABILE Q.O. SU $[a,b]$ CON $u' \in L^1_{loc}(a,b)$ E VALE

$$u(x) - u(y) = \underbrace{\int_y^x u'}_{\substack{\to 0 \\ y \to x}} \qquad \forall x, y \in (a,b).$$

($\Rightarrow u$ È CONTINUA)

ESEMPIO FUNZIONE "SCALA" DI CANTOR



u È CONTINUA

$u' \equiv 0$ Q.O. MA

$\int_0^1 u' = 0 \neq u(1) - u(0)$

NON È ASSOLUTAMENTE CONTINUA

PROPOSIZIONE SIA $u \in L^1_{loc}((a,b))$. ALLORA:

u È DERIVABILE IN SENSO DEBOLE SU $(a,b) \iff \exists\, V$ ASSOL. CONTINUA TALE CHE $V \equiv u$ Q.O.

LEMMA SE $\boxed{\int_a^b h\varphi' = 0}$ $\forall \varphi \in C_0^1((a,b)) \Rightarrow h \equiv$ COSTANTE.

DIM DATA $\psi \in C_0^1((a,b))$, DEFINISCO $\varphi(x) = \int_a^x \psi - \left(\int_a^b \psi\right)\int_a^x \eta_0$

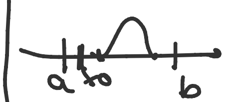
CON $\eta_0 \in C_0^1((a,b))$ FISSATA CON $\int_a^b \eta_0 = 1 \Rightarrow \varphi \in C_0^1((a,b))$

$$\Rightarrow 0 = \int_a^b h\varphi' = \int_a^b h(x)\left(\psi(x) - \left(\int_a^b \psi\right)\eta_0(x)\right)dx = \int_a \psi \left(\underbrace{h - \int_a h\eta_0}\right) \quad \forall \psi \in C_0^1((a,b))$$

$$\Rightarrow h - \int_a^b h\eta_0 = 0 \text{ Q.O.} \Rightarrow h \equiv \underbrace{\int_a h\eta_0}_{\text{COSTANTE}} \text{ Q.O.}$$

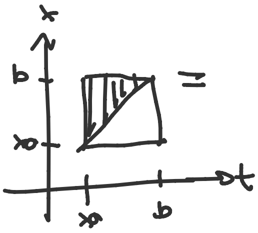
DIM. PROPOSIZIONE

($\Leftarrow$) SUPPONIAMO u ASSOL. CONTINUA. $\Rightarrow u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'$



$\varphi \equiv 0$ SU $[a, x_0]$

$$\int_a^b u\varphi' = \int_a^b \left(u(x_0) + \int_{x_0}^x u'\right)\varphi'(x)\,dx = \int_{x_0}^b \left(\int_{x_0}^x u'(t)dt\right)\varphi'(x)\,dx + u(x_0)\cancel{\int_{x_0}^b \varphi'}$$



$$= \int_{x_0}^b \left(\int_t^b \varphi'(x)dx\right)u'(t)dt = \int_{x_0}^b \left(\cancel{\varphi(b)} - \varphi(t)\right)u'(t)dt = -\int_a^b u'\varphi$$

$\varphi(b) - \varphi(x_0) = 0$

$\Rightarrow \exists$ DERIVATA DEBOLE.

($\Rightarrow$) SUPPONIAMO $\exists\, u'$ DERIVATA DEBOLE DI u. PONGO $V(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'$

CON $x_0 \in (a,b)$ FISSATO. PER DEF. V È ASSOL. CONT. E $V(x_0) = u(x_0)$

$\forall \varphi \in C_0^1((a,b))$ $\int u\varphi' = -\int u'\varphi = \int V\varphi'$

DEF. DERIVATA DEBOLE

SE V È ASS. CONTINUA POSSO INTEGRARE PER PARTI

$\Rightarrow \int (u - V)\varphi' = 0 \overset{\text{LEMMA}}{\Rightarrow} u - V$ COSTANTE, MA $(u-V)(x_0) = 0 \Rightarrow u - V \equiv 0$

CIOÈ $u \equiv V$ CHE È ASSOL. CONTINUA

... COSTANTE, MA $(U-V)(x_0)=0 \Rightarrow U-V\equiv 0$

CIOÈ $U=V$ CHE È ASSOL. CONTINUA.

$\int_a^b u\varphi \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1((a,b))$ COROLLARIO 4.24 DI BRÉZIS (IN INGLESE)

DENSITÀ DI C_0^1: APPROSSIMO $g\in L^\infty$ CON $\varphi_n \in C_0^1$

$\forall u \in L^1 \quad \int u\varphi_n \to \int ug$ PRENDO $g=$ SEGNO(u)

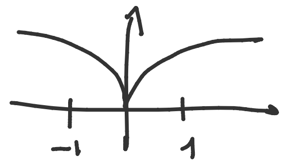
$\underline{0} \leq \int u\varphi_n \to \underline{\int |u|} \Rightarrow u=0$ Q.O.

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ LO <u>SPAZIO DI SOBOLEV</u> $W^{1,p}((a,b))$ È $(1\leq p\leq +\infty)$

$$W^{1,p}((a,b)) = \{u\in L^p((a,b)) : u \text{ HA DERIVATA DEBOLE } u',\ u'\in L^p((a,b))\}$$

UNA NORMA SU $W^{1,p}((a,b))$ È $\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $u(x)=|x|^\alpha \quad 0<\alpha<1$



$u\in W^{1,p}((-1,1)) \iff p<\frac{1}{1-\alpha}$

HA DERIVATA DEBOLE $u'(x) = \frac{\alpha}{|x|^{1-\alpha}}$ SEGNO(x)

$\boxed{\text{OSS}}$ UNA NORMA EQUIVALENTE È $\left(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int (|u|^p + |u'|^p)\right)^{\frac{1}{p}}$

(SEGUE DA $\frac{a+b}{C_p} \leq (a^p+b^p)^{\frac{1}{p}} \leq (a+b)C_p \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$)

$p=2 \Rightarrow \|u\| = \sqrt{\int u^2+u'^2}$ DERIVA DAL PRODOTTO SCALARE $(u,v) = \int uv+u'v'$

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ $W^{1,p}((a,b))$ È COMPLETO $\forall p\in[1,+\infty]$. IN PARTICOLARE, $W^{1,2}((a,b))$ È SPAZIO DI HILBERT.

$\boxed{\text{DIM}}$

PRENDO $\{u_n\}$ CAUCHY IN $W^{1,p}$.

$\{u_n\}, \{u_n'\}$ CAUCHY IN $L^p \Rightarrow \begin{matrix} u_n \to u \\ u_n' \to g \end{matrix}$ IN L^p PER QUALCHE u, g (COMPLETEZZA DI L^p)

$\forall \varphi \in C_0^1$

$\forall \varphi \in C_0^1$ $\quad u_k' \to g$ $\quad$ ... (DI L^p)

$g = u'$, PERCHÉ $\int u_k \varphi' \to \int u \varphi'$ $\quad \Rightarrow \quad u_k \to u$ IN $W^{1,p}$ PERCHÉ

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad$

$\quad\quad\quad\quad\;\; -\int u_k' \varphi \to -\int g\varphi \quad\quad \|u_k - u\|_{W^{1,p}} = \|u_k - u\|_{L^p} + \|u_k' - g\|_{L^p} \to 0$

$\Rightarrow W^{1,p}$ È COMPLETO.

TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DEGLI SPAZI DI SOBOLEV)

SIA $u \in L^p((a,b))$ CON $p > 1$. ALLORA, SI EQUIVALGONO:

(a) $u \in W^{1,p}((a,b))$

(b) $\exists C > 0 : \left| \int_a^b u \varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$

(c) $\exists C > 0 : \|u(x+h) - u(x)\|_{L^p} \leq C |h|$

$C = \|u'\|_{L^p}$

SE $p = 1$, (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c)

OSS (1) $p = 1$ $\quad u(x) = \text{SEGNO}(x)$ VERIFICA (b) (c) MA NON (a)

$$\left| \int_a^b u \varphi' \right| = |-2\varphi(0)| \leq 2 \|\varphi\|_{L^\infty} \quad\quad \|u(x+h) - u(x)\|_{L^1} \leq 2|h|$$

(2) $p = \infty$ $\quad$ (c) VUOL DIRE $u \in Lip((a,b))$, DUNQUE $u \in W^{1,\infty} \Leftrightarrow u$ È LIPSCHITZ

COROLLARIO SE $u \in W^{1,p}((a,b))$ E $H \in Lip(\mathbb{R})$, $H(0) = 0$ ALLORA $H(u) \in W^{1,p}((a,b))$ E $(H(u))' = H'(u)\, u'$

DIM

ANZITUTTO, $H(u) \in L^p((a,b))$ PERCHÉ $\int |H(u)|^p \leq \int L^p |u|^p < +\infty$

$|H(u)| = |H(u) - H(0)| \leq L|u|$

$u \in W^{1,p} \underset{(c)}{\Rightarrow} \|u(x+h) - u(x)\|_{L^p} \leq C|h| \Rightarrow \|H(u(x+h)) - H(u(x))\| \leq L \|u(x+h) - u(x)\|$

$\leq C L \|h\|$

$\overset{(c)}{\Rightarrow} H(u) \in W^{1,p}$.

DIM. TEOREMA

(a $\Rightarrow$ b) SE $u \in W^{1,p}((a,b))$, $\forall \varphi \in C_0^1((a,b))$ $\left| \int_a^b u \varphi' \right| = \left| -\int_a^b u' \varphi \right| \leq \underbrace{\|u'\|_{L^p}}_{= C} \|\varphi\|_{L^{p'}}$

$((a,b))$, $\forall \varphi \in C_0((a,b))$ $\int_a u\varphi \le \left|\int_a u\varphi\right| \le \underbrace{\|u\|_{L^p}}_{=C} \|\varphi\|_{L^{p'}}$

b => a — SE $p>1$

$$L: C_0^1((a,b)) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi \longrightarrow -\int_a^b u\varphi'$$

È CONTINUO RISPETTO A $\|\cdot\|_{L^{p'}}$ PER IPOTESI

=> POSSO ESTENDERE A $\tilde{L}: L^{p'}((a,b)) \longrightarrow \mathbb{R}$ $1 \le p' < \infty$ => $\tilde{L} \in (L^{p'})^*$

SARÀ DEL TIPO $\tilde{L}: \varphi \rightarrow \int_a^b \varphi g$ PER QUALCHE $g \in L^p$

=> SE $\varphi \in C_0^1((a,b))$ ALLORA $-\int_a^b u\varphi' = \int_a^b \varphi g$ => U HA DERIVATA DEBOLE $g \in L^p((a,b))$

$u \in W^{1,p}((a,b))$.