Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 16/06/2026 *

Esercizio 1 (3 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione

$$-\overline{z}^9 = \frac{a}{1+i} - \frac{a}{1-i}. \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione: L'equazione equivale a $z^9 = -\overline{\frac{a}{1+i} - \frac{a}{1-i}} = -ai = ae^{-i\frac{\pi}{2}}$, dunque le soluzioni sono

$$z = \sqrt[9]{a}e^{i\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{9}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Esercizio 2 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + a^{2n}}{n!(n^{2n}+e)^{\frac{1}{n}}}. \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + a^{2n}}{n!(n^{2n}+e)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+2)!}{n!} + \frac{a^{2n}}{n!}}{(n^{2n}+e)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(n+1) + \frac{a^{2n}}{n!}}{n^2\left(1+\frac{e}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{a^{2n}}{n^2 n!}}{\left(1+\frac{e}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \arctan \frac{a^2}{x^2 - 2ax + a^2} - \frac{\pi}{4}, \qquad (a = 2, 3, 4, 5)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per i valori che non annullano il denominatore, cioè

$$(-\infty, a) \cup (a, +\infty).$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Per la monotonia dell'arcotangente, il segno della funzione è

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } 0 < x < a, a < x < 2a \\ f(x) &= 0 \quad \text{per } x = 0, 2a \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x < -a, x > -2a \end{aligned}$$

dunque in particolare il grafico di f interseca in $(0,0), (2a, 0)$ l'asse orizzontale, e in $(0,0)$ anche l'asse verticale.

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio vale

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x \to a^\pm} f(x) = \frac{\pi}{4},$$

dunque $y = -\frac{\pi}{4}$ è un asintoto orizzontale.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x) = -\frac{2a^2}{(x-a)^3 \left(1 + \frac{a^4}{(x-a)^4}\right)^2}$ si deduce che

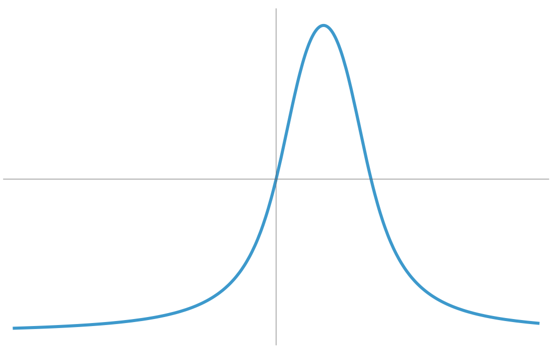
$$\begin{aligned} &f(x) \quad \text{è crescente per} \quad x < a \\ &f(x) \quad \text{è decrescente per} \quad x > a \\ &f(x) \quad \text{NON ha massimi né minimi.} \end{aligned}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = \frac{2a^2 \left(3(x-a)^4 - a^4\right)}{(x-a)^8 \left(1 + \frac{a^4}{(x-a)^4}\right)^2}$, opposto al segno del denominatore, si ottiene che

$$\begin{aligned} &f(x) \quad \text{è convessa per} \quad x < \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) a, x > \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) a \\ &f(x) \quad \text{è concava per} \quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) a < x < 0, 0 < x < \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) a \\ &f(x) \quad \text{ha un flesso in} \quad x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) a, \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) a. \end{aligned}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{a}} \frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{a}\right)-\cos^3\left(x-\frac{\pi}{a}\right)}\mathrm{d}x. \qquad (a=2,3,4,6)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{a}} \frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{a}\right)-\cos^3\left(x-\frac{\pi}{a}\right)}\mathrm{d}x &\overset{\left(y=x-\frac{\pi}{a}\right)}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(y)-\cos^3 y}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos y}{\left(1-\sin^2 y\right)\sin^2 y}\mathrm{d}y \\
&\overset{(z=\sin y)}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\left(1-z^2\right)z^2}\mathrm{d}z \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z \\
&= \left[-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\ln(z+1)-\frac{1}{2}\ln(1-z)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= 2-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)}{2}-\frac{\ln 3}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (3 punti) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+a}e^{-x\arcsin\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x. \qquad (a=1,2,3,4)$$

Soluzione: Poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+a}e^{-x\arcsin\frac{1}{x^2}}=1$, l'integrale ha lo stesso comportamento di $\int_1^{+\infty} 1\mathrm{d}x$, cioè

NON CONVERGE.

Esercizio 6 (3 punti) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\ln^3 k}{k^2-2k+1+a}. \qquad (a=1,2,3,4)$$

Soluzione: Poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln^3 n}{n^2-2n+1+a}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=0$, dal criterio del confronto con la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ segue che la serie converge assolutamente e in particolare

CONVERGE.

Esercizio 7 (6 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x)=3\sqrt{x+1}\left(y(x)+ae^{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ y(0)=2ae^2 \end{cases}. \qquad (a=\pm 2,\pm 3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int_0^x 3\sqrt{y+1}\mathrm{d}y}\left(2ae^2+\int_0^x e^{-\int_0^t 3\sqrt{s+1}\mathrm{d}s}3\sqrt{t+1}ae^{2(t+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t\right) \\ &= e^{2(x+1)^{\frac{3}{2}}-2}\left(2ae^2+\int_0^x te^{2-2(t+1)^{\frac{3}{2}}}3\sqrt{t+1}ae^{2(t+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t\right) \\ &= ae^{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}\left(2+\int_0^x 3\sqrt{t+1}\mathrm{d}t\right) \\ &= ae^{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}\left(2+2(x+1)^{\frac{3}{2}}-2\right) \\ &= 2a(x+1)^{\frac{3}{2}}e^{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$