

Nome:	Cognome:	Matricola:
-------	----------	------------

Esame di Analisi I - 22/07/2026 *

Esercizio 1 (3 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione

$$z^{12} - 2aiz^6 - 4a^2 = 0. \quad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione: Scrivendo l'equazione come $0 = (z^6 - (\sqrt{3} + i)a)(z^6 - (-\sqrt{3} + i)a) = (z^6 - 2ae^{i\frac{\pi}{6}})(z^6 - 2ae^{i\frac{5}{6}\pi})$, le soluzioni sono date dagli zeri di uno dei due fattori e cioè

$$z = \sqrt[6]{2a}e^{i(\frac{\pi}{36} + \frac{k}{3}\pi)}, z = \sqrt[6]{2a}e^{i(\frac{5}{36}\pi + \frac{k}{3}\pi)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Esercizio 2 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln \left(\frac{n+a}{n-a} \right)}{\ln(e^n + n^{|a|})}. \quad (a = \pm 2, \pm 3)$$

Soluzione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln \left(\frac{n+a}{n-a} \right)}{\ln(e^n + n^{|a|})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{2a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)}{\ln(e^n) + \ln \left(1 + \frac{n^{|a|}}{e^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2an + o(n)}{n + \ln \left(1 + \frac{n^{|a|}}{e^n} \right)} = 2a.$$

*ISTRUZIONI:

Scrivere nome, cognome e numero di matricola.

Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.

Non usare libri, appunti né calcolatrici.

Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \ln \left(2 - \sin \frac{x}{a} \right), \quad (a = 2, 3, 4, 5)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: Poiché il seno è sempre minore o uguale a 1, l'argomento del logaritmo è sempre positivo e dunque la funzione è definita per ogni valore reale, cioè

$$(-\infty, +\infty).$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Restrignendoci per periodicità all'intervallo, $[-\pi a, \pi a)$, avremo

$$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad -\pi a \leq x < \frac{\pi}{2}a, \frac{\pi}{2}a < x < \pi a$$

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{\pi}{2}a$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio vale

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x),$$

dunque non ci sono asintoti.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x) = \frac{-\cos\left(\frac{x}{a}\right)}{a\left(2 - \sin\left(\frac{x}{a}\right)\right)}$, che coincide con quello del numeratore, si deduce che

$$f(x) \quad \text{è crescente per} \quad -\pi a < x < -\frac{\pi}{2}a, \frac{\pi}{2}a < x < \pi a$$

$$f(x) \quad \text{è decrescente per} \quad -\frac{\pi}{2}a < x < \frac{\pi}{2}a$$

$$f(x) \quad \text{ha un massimo in} \quad x = -\frac{\pi}{2}a, \frac{\pi}{2}a$$

$$f(x) \quad \text{ha un massimo in} \quad x = \frac{\pi}{2}a, \frac{\pi}{2}a$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

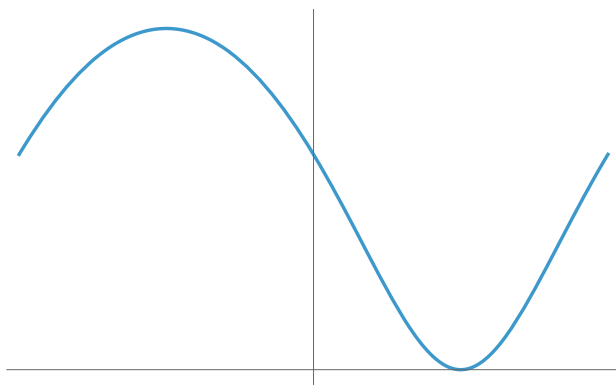
Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{a}\right) - 1}{a^2\left(2 - \sin\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2}$ si ottiene che

$$f(x) \quad \text{è convessa per} \quad -\pi a < x < \frac{\pi}{6}a, \frac{5}{6}\pi a < x < \pi a$$

$$f(x) \quad \text{è concava per} \quad -\frac{\pi}{6}a < x < \frac{5}{6}\pi a$$

$$f(x) \quad \text{ha un flesso in} \quad x = \frac{\pi}{6}a, \frac{5}{6}\pi a.$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{\pi^3}{8}}^{\pi^3} \frac{e^{a\sqrt[3]{x}} \sin \sqrt[3]{x}}{x^{\frac{2}{3}}} dx. \quad (a = \pm 2, \pm 3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi^3}{8}}^{\pi^3} \frac{e^{a\sqrt[3]{x}} \sin \sqrt[3]{x}}{x^{\frac{2}{3}}} dx &\stackrel{(y=\sqrt[3]{x})}{=} 3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{ay} \sin y \\ &= 3 \left(\left[\frac{e^{ay} \sin y}{a} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{ay} \cos y}{a} dy \right) \\ &= 3 \left(-\frac{e^{a\frac{\pi}{2}}}{a} - \left[\frac{e^{ay} \cos y}{a^2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{e^{ay} \sin y}{a^2} dy \right) \\ &= \frac{3}{a^2} e^{a\pi} - \frac{3}{a} e^{a\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{a^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{ay} \sin y \\ &\Rightarrow \int_{\frac{\pi^3}{8}}^{\pi^3} \frac{e^{a\sqrt[3]{x}} \sin \sqrt[3]{x}}{x^{\frac{2}{3}}} dx = 3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{ay} \sin y = \frac{3e^{a\pi} - 3ae^{a\frac{\pi}{2}}}{1 + a^2}. \end{aligned}$$

Esercizio 5 (3 punti) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^4 + a)}{x \ln^2(x + a)} dx. \quad (a = 1, 2, 3, 4)$$

Soluzione: Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x^4 + a)}{x \ln^2(x + a)}}{\frac{1}{x \ln(x + 1)}} = 4$, l'integrale ha lo stesso comportamento di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x + 1)} dx$, cioè

NON CONVERGE.

Esercizio 6 (3 punti) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^a}\right) \sin(k^a). \quad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione: Poiché $\left|\sin\left(\frac{1}{n^a}\right) \sin(n^a)\right| \leq \sin \frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{n^a}$, dal criterio del confronto con la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ deduciamo che la serie converge assolutamente e in particolare

CONVERGE.

Esercizio 7 (6 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y''(x) + a^2 y(x) = 2a^2 \cos(|a|x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases} . \quad (a = \pm 2, \pm 3)$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + a^2$ ha per radici complesse coniugate $\lambda = \pm ia$, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono $c_1 \cos(|a|x) + c_2 \sin(|a|x)$ e una soluzione particolare sarà da cercare nella forma $y(x) = cx \cos(|a|x) + c'x \sin(|a|x)$; si ottiene una soluzione per $c = a, c' = 0$ e dunque la soluzione generale sarà $y(x) = c_1 \cos(|a|x) + (c_2 - |a|x) \sin(|a|x)$; imponendo le condizioni iniziali si ottiene $c_1 = 1, c_2 = \text{segno}(a)$ e cioè

$$y(x) = \cos(|a|x) + (\text{segno}(a) + |a|x) \sin(|a|x).$$