

AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 11 di lunedì 9 dicembre 2024

Argomenti: equazioni differenziali

Esercizio 1.

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + \cos t \\ x(0) = -1 \end{cases}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int_0^t 2ds} \left(-1 + \int_0^t e^{-\int_0^s 2dr} \cos s ds \right) \\ &= e^{2t} \left(-1 + \int_0^t e^{-2s} \cos s ds \right) \\ &= e^{2t} \left(\frac{e^{-2t} \sin t}{5} - \frac{2}{5} e^{2t} \cos t + \frac{2}{5} - 1 \right) \\ &= \frac{\sin t}{5} - \frac{2}{5} \cos t - \frac{3}{5} e^{2t}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = t^3 x(t) - t^7 \\ x(0) = 2 \end{cases}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int_0^t s^3 ds} \left(2 + \int_0^t e^{\int_0^s r^3 dr} (-s^7) ds \right) \\ &= e^{-\frac{t^4}{4}} \left(2 - \int_0^t e^{\frac{s^4}{4}} s^7 ds \right) \\ &= e^{-\frac{t^4}{4}} \left(2 - \left(-t^4 e^{-\frac{t^4}{4}} - 4e^{-\frac{t^4}{4}} + 4 \right) \right) \\ &= -2e^{-\frac{t^4}{4}} + t^4 + 4. \end{aligned}$$

Esercizio 3.

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 - 4 \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

Soluzione:

$$\frac{x'(t)}{x(t)^2 - 4} = 1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \\
t &= \int_0^t d\tau \\
&= \int_0^t \frac{x'(\tau)}{x(\tau)^2 - 4} d\tau \\
&= \int_0^{x(t)} \frac{dx}{x^2 - 4} \\
&= \int_0^{x(t)} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+2} \right) \\
&= \left[\frac{1}{4} \log|x-2| - \frac{1}{4} \log|x+2| \right]_0^{x(t)} \\
&= \frac{1}{4} \log \frac{2-x(t)}{x(t)+2} \\
\Rightarrow x(t) &= 2 \frac{1-e^{4t}}{e^{4t}+1}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{t+1}x(t) \\ x(0) = 2 \end{cases}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\frac{x'(t)}{x(t)} &= \sqrt{t+1} \\
\Rightarrow \\
\frac{2}{3} \left((t+1)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) &= \int_0^t \sqrt{\tau+1} d\tau \\
&= \int_0^t \frac{x'(\tau)}{x(\tau)} d\tau \\
&= \int_2^{x(t)} \frac{dx}{x} \\
&= [\log|x|]_2^{x(t)} \\
&= \log(x(t)) - \log 2 \\
\Rightarrow x(t) &= 2e^{\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{2}{3}} - 1}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (Assegnato per casa).

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)^3 \cos t \\ x(0) = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\frac{x'(t)}{x(t)^3} &= -\cos t \\
\Rightarrow \\
-\sin t &= \int_0^t -\cos \tau d\tau \\
&= \int_0^t \frac{x'(\tau)}{x(\tau)^3} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{1}{2}}^{x(t)} \frac{dx}{x^3} \\ &= \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{\frac{1}{2}}^{x(t)} \\ &= 2 - \frac{1}{2x^2} \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{1}{\sqrt{4 + 2 \sin t}}. \end{aligned}$$