AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 12 di mercoledì 11 dicembre 2024

Argomenti: equazioni differenziali

Esercizio 1.
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = e^t \\ x'(0) = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ ha la radice doppia $\lambda = -1$, dunque le soluzioni dell'omogenea associata sono $c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t}$. Una soluzione particolare del tipo $x(t) = ae^t$ verificherà $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 4ae^t$, dunque $a = \frac{1}{4}$ e cioè $x(t) = \frac{e^t}{4}$. La soluzione generale è dunque $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} + \frac{e^t}{4}$ e imponendo le condizioni iniziali si ottiene $\begin{cases} x'(0) = c_2 - c_1 + \frac{1}{4} \\ x(0) = c_1 + \frac{1}{4} \end{cases}$, ovvero $c_2 = -\frac{1}{4}, c_1 = \frac{1}{4}$ e quindi

$$x(t) = \frac{t}{2}e^{-t} - \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^t}{4}.$$

Esercizio 2.
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = \sin(3t) \\ x'(0) = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

Soluzione: Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda = -3i$, dunque le soluzioni dell'omogenea sono $c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$ e la soluzione particolare da trovare dovrà essere del tipo $x(t) = at\cos(3t) + bt\sin(3t)$. Poiché $x''(t) + 9x(t) = 6b\cos(3t) - 6a\sin(3t)$, avremo una soluzione particolare per $a = -\frac{1}{6}, b = 0$ e la soluzione generale è $c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) - \frac{t}{6}\cos(3t)$. Le condizioni iniziali equivalgono a $\begin{cases} x'(0) = 3c_2 - \frac{1}{6} \\ x(0) = c_1 \end{cases}$, cioè $c_1 = 0, c_2 = \frac{7}{18}$ e quindi la soluzione è

$$x(t) = \frac{7}{18}\sin(3t) - \frac{t}{6}\cos(3t).$$

Esercizio 3 (Assegnato per casa)**.**
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x''(t) - x(t) = \cos t \\ x'(0) = -1 \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1$, che ha per soluzioni $\lambda = \pm 1$, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. Cercando una soluzione particolare del tipo $x(t) = a \cos t + b \sin t$ avremo $x''(t) - x(t) = -2a \cos t - 2b \sin t$, dunque $a = -\frac{1}{2}, b = 0$ e quindi la soluzione particolare è $-\frac{\sin t}{2}$ e la soluzione generale è $c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{\cos t}{2}$. Imponendo infine le condizioni iniziali avremo $\begin{cases} x'(0) = c_1 - c_2 \\ x(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{2} \end{cases}$, cioè $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{5}{4}$ e la soluzione del problema è

$$x(t) = \frac{e^t}{4} + \frac{5}{4} e^{-t} - \frac{\cos t}{2}.$$