AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 13 di venerdì 13 dicembre 2024

Argomenti: equazioni differenziali

Esercizio 1.
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x''(t)+4x'(t)+4x(t)=e^{-2t} \\ x'(0)=2 \\ x(0)=-1 \end{cases}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico ha radice doppia $\lambda=-2$, quindi l'omogenea ha per soluzioni $c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$, mentre la soluzione particolare sarà da trovare nella forma $x(t)=at^2e^{-3t}$, da cui si ottiene $x''(t)+4x'(t)+4x(t)=2ae^{-2t}$ e quindi $a=\frac{1}{2}$ e la soluzione generale è $c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+\frac{t^2}{2}e^{-2t}$. Imponendo le condizioni generali avremo $\begin{cases} x'(0)=-2c_1+c_2 \\ x(0)=c_1 \end{cases}$, cioè $c_1=-1,c_2=0$, che danno la soluzione

$$x(t)=-e^{-2t}+\frac{t^2}{2}e^{-2t}.$$

Esercizio 2.
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x''(t)+2x'(t)+x(t)=\dfrac{e^{-t}}{t+1} \\ x'(1)=-1 \\ x(1)=1 \end{cases}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico $\lambda^2+2\lambda+1$ ha per radice doppia $\lambda=-1$, dunque le soluzioni dell'omogenea solo $c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$, mentre una soluzione particolare, con il metodo della variazione delle costanti, sarà del tipo $c_1(t)e^{-t}+c_2(t)te^{-t}$. $c_1(t),c_2(t)$ dovranno risolvere il sistema $\begin{cases} c_1'(t)e^{-t}+c_2'(t)te^{-t}=0 \\ -c_1'(t)e^{-t}+c_2'(t)(1-t)e^{-t}=\dfrac{e^{-t}}{t+1} \end{cases}$, ovvero $c_1'(t)=-\frac{t}{t+1},c_2'(t)=\frac{1}{t+1}$ e quindi $c_1(t)=\log(1+t)-t,c_2(t)=\log(1+t)$. La soluzione generale è dunque $c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+(\log(1+t)-t)e^{-t}+\log(1+t)te^{-t}$, e con le condizioni iniziali $\begin{cases} x(0)=c_1 \\ x'(0)=c_2-c_1 \end{cases}$ si ottiene $c_1=1,c_2=0$ e cioè

$$x(t)=e^{-t}+(\log(1+t)-t)e^{-t}+\log(1+t)te^{-t}.$$

Esercizio 3.
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x''(t)+4x(t)=\dfrac{1}{\cos(2t)} \\ x'(0)=1 \\ x(0)=0 \end{cases}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico ha radici complesse $\lambda = \pm 2i$, dunque le soluzioni dell'omogenea sono $c_1\cos(2t)+c_2\sin(2t)$ e la soluzione particolare, con il metodo della variazione delle costanti, sarà del tipo $c_1(t)\cos(2t)+c_2(t)\sin(2t)$, con $c_1(t), c_2(t)$ che risolvono $\begin{cases} c_1'(t)\cos(2t)+c_2'(t)\sin(2t)=0 \\ -2c_1'(t)\sin(2t)+2c_2'(t)\cos(2t)=\dfrac{1}{\cos(2t)} \end{cases}$ dunque $c_1'(t) = -\dfrac{\tan(2t)}{2}, c_2'(t)=\dfrac{1}{2}$ e cioè $c_1(t)=\dfrac{\log(\cos(2t))}{4}, c_2(t)=\dfrac{t}{2}$. La soluzione generale è dunque $c_1\cos(2t)+c_2\sin(2t)+\dfrac{\log(\cos(2t))}{4}\cos(2t)+\dfrac{t}{2}\sin(2t)$ e, imponendo le condizioni iniziali $\begin{cases} x(0)=c_1 \\ x'(0)=2c_2 \end{cases}$ si ottiene $c_1=0, c_2=\dfrac{1}{2}$ e cioè

$$x(t)=\frac{\sin(2t)}{2}+\frac{\log(\cos(2t))}{4}\cos(2t)+\frac{t}{2}\sin(2t).$$

Esercizio 4.
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+5x(t)=t \\ x'(0)=0 \\ x(0)=0 \end{cases}.$$

Soluzione: Le radici del polinomio caratteristico $\lambda^2-2\lambda+5$ sono $\lambda=1\pm 2i$, quindi le soluzioni dell'omogenea associata sono $c_1e^t\cos(2t)+c_2e^t\sin(2t)$. La soluzione particolare $x(t)=at+b$ verificherà $5at-2a+5b=t$, cioè $a=\dfrac{1}{5}, b=\dfrac{2}{25}$ e la soluzione generale è quindi $x(t)=c_1e^t\cos(2t)+c_2e^t\sin(2t)+\dfrac{t}{5}+\dfrac{2}{25}$. Con la condizioni iniziali avremo $\begin{cases} x'(0)=c_1+2c_2+\dfrac{1}{5} \\ x(0)=c_1+\dfrac{2}{25} \end{cases}$, dunque $c_1=-\dfrac{2}{25}, c_2=-\dfrac{5}{25}$ e si ottiene

$$x(t)=-\frac{2}{25}e^t\cos(2t)-\frac{3}{50}e^t\sin(2t)+\frac{t}{5}+\frac{2}{25}.$$

Esercizio 5 (Assegnato per casa)**.**
Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} x''(t)-3x'(t)+2x(t)=\dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \\ x'(0)=0 \\ x(0)=0 \end{cases}.$$

Soluzione: Le radici del polinomio caratteristico $\lambda=1,2$ danno origine alle soluzioni $c_1e^t+c_2e^{2t}$ per l'equazione omogenea mentre, attraverso la variazione delle costanti, si cercherà una soluzione della forma $c_1(t)e^t+c_2(t)e^{2t}$. $c_1(t), c_2(t)$ dovranno risolvere $\begin{cases} c_1'(t)e^t+c_2'(t)e^{2t}=0 \\ c_1'(t)e^t+2c_2'(t)e^{2t}=\dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases}$, da cui $c_1'(t)=-\dfrac{e^{2t}}{e^{2t}+1}, c_2'(t)=\dfrac{e^t}{e^{2t}+1}$ e cioè $c_1(t)=-\dfrac{\log\left(e^{2t}+1\right)}{2}, c_2(t)=\arctan\left(e^t\right)$; la soluzione generale è dunque $c_1e^t+c_2e^{2t}-\dfrac{\log\left(e^{2t}+1\right)}{2}e^t+\arctan\left(e^t\right)e^{2t}$, e imponendo infine le condizioni iniziali $\begin{cases} x(0)=c_1+c_2+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\log 2}{2} \\ x'(0)=c_1+2c_2+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\log 2}{2} \end{cases}$ si ottiene $c_1=\dfrac{\log 2}{2}, c_2=-\dfrac{\pi}{4}$, da cui

$$x(t)=\frac{\log 2}{2}e^t-\frac{\pi}{4}e^{2t}-\frac{\log\left(e^{2t}+1\right)}{2}e^t+\arctan\left(e^t\right)e^{2t}.$$