AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 1 di venerdì 4 ottobre 2024

Argomenti: principio di induzione

Esercizio 1.
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero $n^2 + 3n$ è pari.

Soluzione: Per $n = 1$ abbiamo $1^2+3\cdot 1 = 4$, che è pari. Supponiamo ora che n^2+3n sia pari e dimostriamo che è pari anche $(n+1)^2 + 3(n+1)$:

$$(n+1)^2 + 3(n+1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 = \left(n^2 + 3n\right) + 2n + 4;$$

è un numero pari perché $n^2 + 3n$ è pari per ipotesi induttiva e perché anche $2n + 4$ è pari.

Esercizio 2.
Dimostrare che, per ogni $n \geq 3$ vale la disuguaglianza $3^n \geq n^3$.

Soluzione: Per $n = 3$ la disuguaglianza è valida perché $3^3 = 3^3 = 27$. Supponendo ora che valga $3^n \geq n^3$, dimostriamo che $3^{n+1} \geq (n+1)^3$:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq 3n^3 \geq n^3 + 3n^2 + 9n \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$$

Esercizio 3.
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la formula $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Soluzione: Per $n = 1$ la formula vale perché $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$. Supponendo ora che la formula valga per n, mostriamo che vale anche per $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\left(n^2 + 4n + 4\right)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la somma dei primi n quadrati perfetti vale $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Soluzione: La formula da dimostrare è $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Per $n = 1$ la formula vale perché $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Supponendo ora che la formula valga per n, mostriamo che vale anche per $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(2n^2 + n + 6n + 6\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero $3^{2n-1} + 2^{n+1}$ è multiplo di 7.

Soluzione: Per $n = 1$ l'affermazione è vera perché $3^{2 \cdot 1 - 1} + 2^{1+1} = 7$. Supponendo poi che sia vero per n, mostriamo che è vero anche per $n+1$:

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 9 \cdot 3^{2n-1} + 2 \cdot 2^{n+1} = 9\left(3^{2n-1} + 2^{n+1}\right) - 7 \cdot 2^{n+1},$$

che è multiplo di 7 perché il primo fattore lo è per ipotesi induttiva mentre il secondo lo è perché appare un fattore 7.

Esercizio 6 (Assegnato per casa)**.**
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la formula $\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.

Soluzione: Per $n = 1$ la formula vale perché $\sum_{k=0}^{1}(3k+1) = 5 = \frac{(1+1)(3+2)}{2}$. Supponendo ora che la formula valga per n, mostriamo che vale anche per $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(3k+1) &= \sum_{k=0}^{n}(3k+1) + \sum_{k=n+1}^{n+1}(3k+1) \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{2} + 3n + 4 \\
&= \frac{3n^2 + 5n + 2 + 6n + 8}{2} \\
&= \frac{3n^2 + 11n + 10}{2} \\
&= \frac{(n+3)(3n+5)}{2}.
\end{aligned}$$