AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 2 di lunedì 7 ottobre 2024

Argomenti: estremo superiore ed inferiore

Esercizio 1.
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{x \in \mathbb{R} : -5 < x^2 - 6x \leq 7\right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\sup A = \max A = 7$ segue immediatamente scrivendo l'insieme come

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-5) > 0,\ (x+1)(x-7) \leq 0\} = ((-\infty, 1) \cup (5, +\infty)) \cap [-1, 7] = [-1, 1) \cup (5, 7].$$

$\inf A = \min A = -1$ segue ragionando allo stesso modo.

Esercizio 2.
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$ perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$\inf A = 1$ perché $\frac{n+2}{n+1} \geq 1$ per ogni n e inoltre, dato $\varepsilon > 0$, avremo $\frac{n+2}{n+1} < 1 + \varepsilon$, cioè $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, scegliendo $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$; non si tratta di un massimo perché non esiste nessun valore per cui $\frac{n+2}{n+1} = 1$

Esercizio 3.
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{\frac{(-1)^n}{n^2+3} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\inf A = \min A = -\dfrac{1}{4}$ perché, scrivendo $A = A_+ \cup A_-$ con

$$A_+ := \left\{ \frac{1}{4n^2+3};\, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A_- := \left\{ -\frac{1}{(2n+1)^2+3};\, n \in \mathbb{N} \right\},$$

avremo $x > 0$ e $y \geq -\dfrac{1}{4} \in A_-$ per ogni $x \in A_+, y \in A_-$.
$\max A = \sup A = \dfrac{1}{7}$ perché $x \leq \dfrac{1}{7} \in A_+$ e $y < 0$ per ogni $x \in A_+, y \in A_-$.

Esercizio 4.
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ \frac{3x-1}{x-2} : x \in \mathbb{R},\, x > 2 \right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\sup A = +\infty$ perché, preso $M > 0$, per $x < 2 + \dfrac{5}{M-3}$ avremo $\dfrac{5}{x-2} > M - 3$ e dunque $\dfrac{3x-1}{x-2} = 3 + \dfrac{5}{x-2} > M$.
$\inf A = 3$ perché $\dfrac{3x-1}{x-2} = 2 + \dfrac{5}{x-2} > 2$ per $x \in A$ e, preso $\varepsilon > 0$, $x > 2 + \dfrac{5}{\varepsilon}$ verifica $\dfrac{5}{x-2} < \varepsilon$, da cui $\dfrac{2x-1}{x-3} < 2 + \varepsilon$; non è un minimo perché la disuguaglianza è sempre stretta.

Esercizio 5 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} :\, x^2 + 3x \leq 2x + 6 \right\} \cup \left\{ \frac{3}{n} :\, n \in \mathbb{N} \right\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Soluzione: $\inf A = \min A = -3$ perché, scrivendo $A = A_1 \cup A_2$ con

$$\begin{aligned} A_1 &:= \left\{ x \in \mathbb{R} :\, x^2 + 3x \leq 2x + 6 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} :\, x^2 + x - 6 \leq 0 \right\} = [-3, 2] \\ A_2 &:= \left\{ \frac{3}{n} :\, n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned}$$

avremo $x \geq -3 \in A_1$ per ogni $x \in A_1$ e $y > 0$ per ogni $y \in A_2$.
$\sup A = \max A = 3$ perché $x \leq 2$ per ogni $x \in A_1$ e $y \leq 3 \in A_2$ per ogni $y \in A_2$.