AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 3 di giovedì 17 ottobre 2024

Argomenti: limiti di successioni

Esercizio 1.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$$

Soluzione: Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 2.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(4n^2+n\right)}{\log\left(5n^3-2\right)}$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(4n^2+n\right)}{\log\left(5n^3-2\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\log n+\log\left(4+\frac{1}{n}\right)}{3\log n+\log\left(5-\frac{1}{n^3}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{\log\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\log n}}{3+\frac{\log\left(5-\frac{1}{n^3}\right)}{\log n}}=\frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n+\sqrt{n}-5}{n+2}$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n+\sqrt{n}-5}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n.$$

Quest'ultimo limite tuttavia non esiste perché per n pari vale 1 mentre per n dispari vale -1, dunque il limite di partenza non esiste.

Esercizio 4.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{\sqrt[3]{n}}.$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\log\left((\log n)^{\log n}\right)}}{e^{\log\left(\sqrt[3]{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} e^{\log n(\log\log n) - \frac{\log n}{3}} = e^{\lim_{n\to\infty}(\log\log n - \frac{1}{3})(\log n)} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Esercizio 5.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^{\sqrt{n}} + 4^n + n^2 3^n}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^{\sqrt{n}} + 4^n + n^2 3^n} &= 3 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{5^{\sqrt{n}}}{4^n} + 1 + n^2 \frac{3^n}{4^n}} \\
&= 4 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^{\sqrt{n} - n\log_5 4} + 1 + n^2 \left(\frac{3}{4}\right)^n} \\
&= 4 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{\pi^2 + \frac{e}{n}} - \pi\right)$$

Soluzione: Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{\pi^2 + \frac{e}{n}} + \pi$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{\pi^2 + \frac{e}{n}} - \pi\right) = \lim_{n\to+\infty} n \frac{\pi^2 + \frac{e}{n} - \pi}{\sqrt{\pi^2 + \frac{e}{n}} + \pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{\sqrt{\pi^2 + \frac{e}{n}} + \pi} = \frac{e}{2\pi}.$$