AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 4 di lunedì 21 ottobre 2024

Argomenti: limiti di successioni

Esercizio 1.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n!)}{\log(n^n)}.$$

Soluzione: Anzitutto, $\frac{\log(n!)}{\log(n^n)}\le 1$ perché $n!\le n^n$; inoltre, fissato $\varepsilon\in(0,1)$, avremo, per n sufficientemente grande,

$$\begin{aligned}\log(n!) &= \log(1\cdot 2\ldots(n-1)n)\\ &\ge \log(([\varepsilon n]+1)([\varepsilon n]+2)\ldots(n-1)n)\\ &\ge \log\left(\underbrace{\varepsilon n\cdot\varepsilon n\ldots\varepsilon n\cdot\varepsilon n}_{\#\ge(1-\varepsilon)n}\right)\\ &\ge \log\left((\varepsilon n)^{(1-\varepsilon)n}\right),\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\log(n!)}{\log(n^n)}\ge\frac{\log\left((\varepsilon n)^{(1-\varepsilon)n}\right)}{\log(n^n)}=1-\varepsilon-\frac{(1-\varepsilon)\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log n}\underset{n\to+\infty}{\to}1-\varepsilon,$$

ma essendo ε arbitrario concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n!)}{\log(n^n)}=1.$$

Esercizio 2.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2}{n^2\cos\frac{1}{n}-n\sin n}$$

Soluzione: Dividendo numeratore e denominatore per n^2 si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2}{n^2\cos\frac{1}{n}-n\sin n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{\cos\frac{1}{n}-\frac{\sin n}{n}}.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$, otterremo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2}{n^2\cos\frac{1}{n}-n\sin n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{1}{n}}=1.$$

Esercizio 3.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - 2^n}{n!\sqrt[n]{n^n+2}}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)! - 2^n}{n!\sqrt[n]{n^n+2}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-\frac{2^n}{n!}}{\sqrt[n]{n^n+2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-\frac{2^n}{n!}}{n\sqrt[n]{1+\frac{2}{n^n}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{2^n}{n\cdot n!}}{\sqrt[n]{1+\frac{2}{n^n}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt[3]{n}+2} 4^{\sin n}.$$

Soluzione: Poiché $\frac{1}{4} \le 4^{\sin n} \le 4$, allora

$$\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt[3]{n}+2} \le \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt[3]{n}+2} 4^{\sin n} \le 4 \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt[3]{n}+2}.$$

Essendo $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt[3]{n}+2} = +\infty$, concludiamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt[3]{n}+2} 4^{\sin n} = +\infty$.

Esercizio 5.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(2^{3n}+5^n\right)}{\log\left(3^{2n}+7^n\right)}.$$

Soluzione: Utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(2^{3n}+5^n\right)}{\log\left(3^{2n}+7^n\right)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(3\log 2)n + \log\left(1+\left(\frac{5}{2^3}\right)^n\right)}{(2\log 3)n + \log\left(1+\left(\frac{7}{3^2}\right)^n\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3\log 2 + \frac{\log\left(1+\left(\frac{5}{8}\right)^n\right)}{n}}{2\log 3 + \frac{\log\left(1+\left(\frac{7}{9}\right)^n\right)}{n}} \\
&= \frac{3\log 2}{2\log 3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\sin(n^2)} + n^{\cos(n^3)}}.$$

Soluzione: Poiché $\left|\sin\left(n^2\right)\right| \leq 1, \left|\cos\left(n^3\right)\right| \leq 1$, allora

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n^{\sin(n^2)} + n^{\cos(n^3)}} &\leq \sqrt[n]{2n}, \\ \sqrt[n]{n^{\sin(n^2)} + n^{\cos(n^3)}} &\geq \sqrt[n]{\frac{2}{n}},\end{aligned}$$

ed essendo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n}} = 1$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\sin(n^2)} + n^{\cos(n^3)}} = 1.$$

Esercizio 7 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(2^n)}{n\log n - \log n!}.$$

Soluzione: Poiché $\cos(2^n)$ è limitata e $n\log n - \log n! = \log\frac{n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, allora dal teorema dei Carabinieri concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(2^n)}{n\log n - \log n!} = 0.$$